Predikátová logika

Predikát

Predikát je slovná predloha (vzor), ktorá popisuje vlastnosť objektov alebo vzťah medzi objektami.

Pr. 1

Obloha je modrá. Moje pero je modré. Tvoje auto je modré. Sú podľa vzoru *niečo je modré.* Táto fráza *je modré* je predikát - popisuje vlastnosť *byť modrý*. Predikáty zvykneme označovať veľkými písmenami (napr. P, Q). Pomenujme náš predikát *je modré* písmenom M. Potom vety, ktoré vyjadrujú *niečo je modré* môžeme zapísať ako M(x), kde x zastupuje ľubovoľný objekt.

Pr. 2

Mama to natrela otcovi. Otec to natrel babke. Babka to natrela dedkovi. .... *x to natrel y.* Vzor ... *to natrel* ... je predikát a vyjadruje vzťah medzi dvoma objektami. Označíme ho napríklad N(x,y).

Pr. 3

x je prvočíslo, $x>1$, $x\vee y$, a/b

Pri predikáte je dôležité stanoviť univerzum – množinu objektov, ktoré nás zaujímajú. Univerzom môže byť **R**, **N**, **Z**, množina všetkých študentov v tejto triede, množina všetkých áut na parkovisku.

Kvantifikátory

Predikát sám o sebe ešte nie je výrok. Napríklad tvrdenie x>1 nie je výrok. Aby sme z predikátu spravili výrok, môžeme buď nahradiť premennú x konkrétnou hodnotou (5>1) alebo kvantifikovať premennú použitím kvantifikátora.

Všeobecný kvantifikátor $\forall$

$\forall x\, P(x)$ – pre každý objekt x z univerza platí P(x) (pre všetky x platí P(x))

Pr.

$\forall x\, (x>1)$

a) nech univerzum je **Z**, potom $\forall x\, (x>1)$ je nepravdivý výrok

b) nech univerzum je {5,6,7,…}, potom $\forall x\, (x>1)$ je pravdivý výrok

Pr.

Vetu *Všetky autá majú kolesá.* môžeme zapísať do výrokovej formy $\forall x\, P(x)$, kde univerzum je množina áut a P(x) je predikát vyjadrujúci *x má kolesá.*

Existenčný kvantifikátor

$\exists x\, P(x)$ – pre nejaký objekt z univerza platí P(x).

Pr.

$\exists x\, (x>1)$

a) nech univerzum je **Z**, potom $\exists x\, (x>1)$ je pravdivý výrok

b) nech univerzum sú záporné čísla, potom $\exists x\, (x>1)$ je nepravdivý výrok

Pr.

Vetu *Niekto ťa má rád.* môžeme zapísať do výrokovej formy $\exists x\, P(x)$, kde univerzum je množina ľudí a P(x) je predikát vyjadrujúci *x ťa má rád.*

Kvantifikátory na konečných množinách

Ak univerzum je konečná množina $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tak

$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$

$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$

Pr.

Univerzum D={2,3,4,5,6}

$\forall x\ (x>4) =$	$2>4$	$\wedge$	$3>4$	$\wedge$	$4>4$	$\wedge$	$5>4$	$\wedge$	$6>4$	$= 0$
	0		0		0		1		1	
$\exists x\ (x>4) =$	$2>4$	$\wedge$	$3>4$	$\wedge$	$4>4$	$\wedge$	$5>4$	$\wedge$	$6>4$	$= 1$

Pr.

Univerzum $\emptyset$

$\forall x\ (x>4)$ t.z. $\forall x\ (x\in\emptyset \Rightarrow x>4) = 1$

$\exists x\ (x>4)$ t.z. $\exists x\ (x\in\emptyset \wedge x>4) = 0$

Formula predikátovej logiky (logický výraz)

Df. Formula predikátovej logiky (logický výraz)

1. Každý predikát s nula alebo viac premennými je formula.
2. Ak α a β sú formuly a x je premenná, potom formulami sú aj:
   a) $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$
   b) $\forall x\ (\alpha)$, $\exists x\ (\alpha)$

Pr.

$\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$

$\forall x\ (P(x) \vee \exists x\ Q(x))$

Viazané a voľné premenné

Premenná vo výrokovej formule je **viazaná**, ak je kvantifikovaná alebo je jej priradená konkrétna hodnota. Premenná, ktorá nie je viazaná, je **voľná**. Oblasť platnosti kvantifikátora – buď je daná zátvorkami, alebo platí len pri najbližšom predikáte.

Pr.

- $\exists x\ P(x,y)$ – x je viazaná, y je voľná
- $\forall x\ [\exists y\ P(x, y) \vee Q(x, y)\ ]$ – x a y sú viazané v P(x,y), y je voľná v Q(x,y), lebo platnosť $\exists y$ sa viaže len na P(x, y). Oblasť platnosti $\forall x$ je $[\exists y\ P(x, y) \vee Q(x, y)\ ]$.

Interpretácia formuly

Formula vo všeobecnosti nie je výrok. Uvažujme napríklad o formule$\forall x\ P(x)$. Nech P(x) znamená *x je nezáporné celé číslo*. Formula je pravdivá, ak univerzum je napríklad{1,3,5}, {2,4,6} alebo **N**, nepravdivá ak univerzum je napríklad {-1,3,6} alebo **Z**. Pravdivostná hodnota formuly teda závisí od univerza a špecifikácie predikátov.

Interpretácia formuly znamená:

1. špecifikácia univerza (neprázdnej oblasti D)
2. špecifikácia predikátov (priradenie predikátu každému symbolu predikátu)
3. priradenie hodnôt všetkým voľným premenným

Pr.

$P(x,y) \Rightarrow \exists z\ (P(x,z) \wedge P(z,y))$

1. D = **R** 2. $P(x,y) \equiv x<y$ 3. $x\in R$, $y\in R$ $x<y \Rightarrow \exists z\ (x<z \wedge z<y)$ $5<8 \Rightarrow \exists z\ (5<z \wedge z<8)$ … 1	1. D = **N** 2. $P(x,y) \equiv x<y$ 3. $x\in N$, $y\in N$ $x<y \Rightarrow \exists z\ (x<z \wedge z<y)$ $5<6 \Rightarrow \exists z\ (5<z \wedge z<6)$ … 0

1. D ={a,b,c}
2. P(x,y) je dané tabuľkou

x	y	P(x,y)	$\Rightarrow$	$\exists z\ (P(x,z) \wedge P(z,y))$	dôvod
a	a	1	1		z=b; a→b→a
a	b	1	1		z=a; a→a→b
a	c	0	1		
b	a	1	1		z=a; b→a→a
b	b	0	1		
b	c	1	1		z=c; b→c→c
c	a	0	1		
c	b	1	1		z=c; c→c→b
c	c	1	1		z=b; c→b→c

Formula sa nazýva **všeobecne pravdivou**, ak je pravdivá pre každú interpretáciu.

Negácia kvantifikátorov

$\neg\forall x\ P(x) = \exists x\ (\neg P(x))$ … Nie je pravda, že každý je šťastný. = Niekto je nešťastný.

$\neg\exists x\ P(x) = \forall x\ (\neg P(x))$ … Neexistuje osoba, ktorá je šťastná. = Všetci sú nešťastní.

Poradie kvantifikátorov

$\forall x\ \forall y\ \alpha = \forall y\ \forall x\ \alpha$

$\exists x\ \exists y\ \alpha = \exists y\ \exists x\ \alpha$ Kvantifikátory rovnakého druhu možno prehadzovať.

$\exists x\ \forall y\ \alpha \Rightarrow \forall y\ \exists x\ \alpha$ Rôzne kvantifikátory nemožno prehadzovať.

Pr.

$P(x,y) \equiv x<y$, D=**R**

$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	pre každé číslo x, existuje číslo y, ktoré je väčšie ako číslo x	pravda
$\exists y\ \forall x\ P(x,y)$	existuje číslo y také, že všetky čísla sú od neho väčšie	nepravda

Pr.

D = **N**, x<y

$\forall x \forall y\ x<y$	0
$\forall y \forall x\ x<y$	0
$\exists y \forall x\ x<y$	0
$\forall x \exists y\ x<y$	1
$\exists x \forall y\ x<y$	0
$\forall y \exists x\ x<y$	0
$\exists y \exists x\ x<y$	1
$\exists x \exists y\ x<y$	1

Pr.

D – množina ľudí, O(x,y) – x je otcom y

$\forall x \forall y\ O(x,y)$	0	pre každého človeka platí, že každý je mu dieťa
$\forall y \forall x\ O(x,y)$	0	pre každé človeka platí, že každý je mu otcom
$\exists y \forall x\ O(x,y)$	0	existuje človek, že každý je mu otcom
$\forall x \exists y\ O(x,y)$	0	pre každého človeka existuje dieťa
$\exists x \forall y\ O(x,y)$	0	existuje človek, že všetci sú jeho deti
$\forall y \exists x\ O(x,y)$	1	pre každého človeka existuje otec
$\exists y \exists x\ O(x,y)$	1	existuje človek, ktoré má otca
$\exists x \exists y\ O(x,y)$	1	existuje človek, ktorý má dieťa

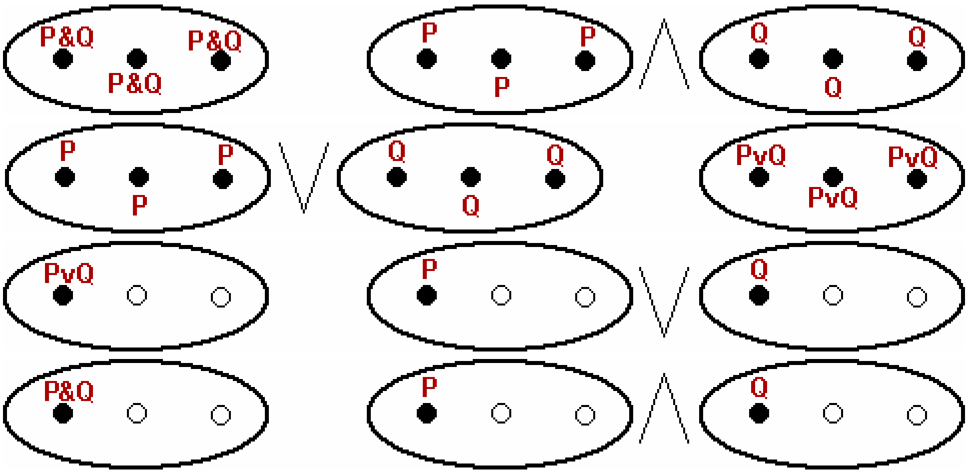
Kvantifikátory a spojky

1. $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$|
2. $(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$
3. $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x))$
4. $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x))$

Pr.

Nech P(x) … x je bohatý, Q(x) ... x je šťastný, D – ľudia

1.
2.
3.
4.



Nech Q neobsahuje x ako voľnú premennú.

1. $\forall x\,(P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow (\forall x\, P(x) \wedge Q)$
2. $(\forall x\, P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \forall x\,(P(x) \vee Q)$
3. $\exists x\,(P(x) \vee Q) \Leftrightarrow (\exists x\, P(x) \vee Q)$
4. $\exists x\,(P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow (\exists x\, P(x) \wedge Q)$

Premenovávanie viazaných premenných

$\forall x\, \alpha = \forall y\, \alpha'$, $\exists x\, \alpha = \exists y\, \alpha'$… ak α nemá voľné výskyty premennej x, môžem x nahradiť

Pr.

$\exists x\, P(x,y)$, nech $P(x,y) = x<y$

x môžem premenovať na z; $\exists z\, P(z,y)$ … môže byť 0,1, závisí od y

x nemôžem premenovať na y; $\exists y\, P(y,y)$ … 0

Dosadzovanie za voľné premenné

$\varphi(x) = \exists y(x = y+y)$

$\varphi(7) = \exists y(7 = y+y)$ … ok

$\varphi(y) = \exists y(y = y+y)$ … zle – za voľnú premennú nemôžem dosadiť viazanú

Prenexný tvar

Vyčistený výraz

Formula sa nazýva **vyčistenou**, ak žiadne dva kvantifikátory nepoužívajú rovnakú premennú a žiadny kvantifikátor nepoužíva premennú, ktorá má aj voľný výskyt v danej formule.

Prenexný tvar

Vyčistený výraz, všetky kvantifikátory sú na začiatku.

Pr.

Zapíšme formulu $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$ v prenexnom tvare.

$\forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x) =^{\text{premenujem}} \forall x\, P(x) \vee \exists y\, \neg P(y) = \exists y(\forall x\, P(x) \vee \neg P(y)) = \exists y \forall x\,(P(x) \vee \neg P(y))$