

Cvičenie 2 – identity a implikácie, dôkazy

- Negujte vety
 - Praha je veľké a staré mesto.
 - Máme zmrzlinu alebo nanuky.
- Napíšte obrátenú a obmenenú implikáciu.
 - Ak je prirodzené číslo deliteľné deviatimi, tak je deliteľné tromi.
 - Ak kladné celé číslo je prvočíslo, tak nemá iné delitele ako 1 a seba samého.
- Dokážte platnosť nasledujúcich ekvivalencií a implikácií pomocou pravdivostných tabuliek.
 - distributívnosť,
 - $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$,
 - $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$,
 - $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,
 - $(\neg A \Rightarrow 0) \Rightarrow A$.
- Ukážte platnosť nasledujúcich ekvivalencií a implikácií bez použitia pravdivostných tabuliek.
 - $p \Rightarrow (p \vee q)$
 - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
 - $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$
- Vyjadrite operátory \Rightarrow , \Leftrightarrow , \uparrow , \downarrow a \oplus pomocou operátorov \neg , \wedge a \vee .
- Definujeme aritmetické vzorčky pre všetky známe operátory.

A	A	
$\neg A$	1-A	
$A \wedge B$	$A * B$ (AB)	
$A \vee B$	$A + B - AB$	$A \vee B = \neg \neg(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B)$ $1 - ((1-A)(1-B)) = 1 - (1-A-B+AB) = A+B-AB$
$A \Rightarrow B$	$1-A+AB$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ $(1-A)+B-(1-A)B = 1-A+B-B+AB = 1-A+AB$
$A \Leftrightarrow B$	$1-A-B+2AB$	$(A \Leftrightarrow B) = ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ $((1-A)+AB)((1-B)+AB) = (1-A)(1-B) + (1-A)AB + (1-B)AB + A^2B^2$ $=$ $1-A-B+AB+AB-A^2B+AB-AB^2+A^2B^2 =_{\text{pre 0 a 1}}$ $1-A-B+AB+AB-AB+AB-AB+AB = 1-A-B+2AB$
$A \uparrow B$	$1-AB$	$(A \uparrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$
$A \downarrow B$	$1-A-B+AB$	$(A \downarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$
$A \oplus B$	$A+B-2AB$	$(A \oplus B) = \neg(A \Leftrightarrow B)$ $1-(1-A-B+2AB) = A+B-2AB$

Definícia: Nech α, β sú výrokové formuly.

$a(1)=1, a(0)=0, a(x)=x$
$a(\neg \alpha) = 1-a$
$a(\alpha \wedge \beta) = \alpha\beta$
$a(\alpha \vee \beta) = \alpha + \beta - \alpha\beta$
$a(\alpha \Rightarrow \beta) = 1 - \alpha + \alpha\beta$
$a(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta$
$a(\alpha \uparrow \beta) = 1 - \alpha\beta$
$a(\alpha \downarrow \beta) = 1 - \alpha - \beta + \alpha\beta$
$a(\alpha \oplus \beta) = \alpha + \beta - 2\alpha\beta$

7. Pomocou aritmetického vzorčeka
 - a) zapíšte formulu $(A \wedge B) \Rightarrow C$,
 - b) dokážte modus ponens $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$.
8. Ktoré pravidlá uvažovania sú použité v nasledujúcich argumentoch?
 - a) Ján má rád jablkový koláč. Preto Ján má rád jablkový koláč alebo zmrzlinu.
 - b) Mária má rada čokoládu a zmrzlinu. Teda Mária má rada čokoládu.
 - c) Ak sneží, cesty sú uzavreté; sneží. Preto sú cesty uzavreté.
 - d) Ak sneží, cesty sú uzavreté; cesty nie sú uzavreté. Teda nesneží.
9. Vyjadrite nasledujúce úvahy pomocou príslušných symbolov. Ktoré pravidlá sú v nich použité?
 - a) Ak sa to bude teenagerom páčiť, tak predaj vzrastie; Bud' sa to bude teenagerom páčiť, alebo obchody zatvoria; Predaj nevzrastá. Teda obchody zatvoria.
Použite symboly: Teenagerom sa to bude páčiť.(T). Predaj vzrastie (P). Obchody zatvoria(O).
 - b) Nie je pravda, že ak je veľa slnka, potom je dosť vody, ani nie je pravda, že bud' veľa prší alebo je úroda dobrá. Preto, nie je dosť vody a úroda nie je dobrá.
Použite symboly: Nie je veľa slnka (S). Je dosť vody (V). Veľa prší (P). Úroda je dobrá (U).
10. Dokážte nasledujúce vety:
 - a) $\forall h \in \mathbb{N}: 5 \nmid h \Rightarrow 25 \nmid h$.
 - b) $\forall h \in \mathbb{N}: 9 \mid h \Rightarrow 3 \mid h$.
 - c) $\forall n \in \mathbb{N}: 16/(n^2+4n) \Rightarrow 2/n$.
 - d) $\forall a, b \in \mathbb{R}: a^2 + b^2 \geq 2ab$.
 - e) V rovine daným bodom na danú priamku prechádza najviac jedna kolmica.
 - f) Ak x a y sú prirodzené čísla, ktorých súčin je párny, potom aspoň jedno z nich je párne.