Domáca úloha č. 1

Podrobné riešenia tejto domácej úlohy treba odovzdať na začiatku cvičení v stredu 8.3. (resp. v piatok 10.3.) 2006. Úloha je za 10 bodov.

- **Príklad 1.** Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Ukážte, že potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

  a) f je injektívne

  b) relácia f^- je jednoznačná

  c) $f \circ f^- = I_A$

- **Príklad 2.** Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Ukážte, že potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

  a) f je surjektívne

  b) relácia f^- je všade definovaná

  c) $f^- \circ f = I_B$

- **Príklad 3.** Nech funkcia $f : A \to B$, kde $A = X \cup Y$ pričom $X \cap Y = \emptyset$. Ak sú obidve zúženia $f|_X$ a $f|_Y$ injektívne, znamená to, že aj f je injektívna?

- **Príklad 4.** Nech R a S sú tranzitívne relácie na A. Dokážte:

  a) $R \cap S$ je tranzitívna.

  b) Ak $R \circ S = S \circ R$, tak $R \circ S$ je tranzitívna.

  c) Nájdite takú množinu A a reácie R a S na A, že $R \circ S$ nie je tranzitívna.

- **Príklad 5.** Nech R a S sú relácie na množine A.

  a) Ak sú R aj S reflexívne, je aj $R \cup S$ reflexívna?

  b) Ak sú R aj S tranzitívne, je aj $R \cup S$ tranzitívna?

  c) Ak sú R aj S symetrické, je aj $R \cup S$ symetrická?

  d) Ak sú R aj S antisymetrické, je aj $R \cup S$ antisymetrická?

  Svoje tvrdenia zdôvodnite.

- **Príklad 6.** Ktoré vlastnosti má a ktoré nemá relácia R definovaná na $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$? (Symbol $\mathcal{N}$ označuje množinu všetkých prirodzených čísel.)

  a) $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y$ je párne čislo.

  b) $(x, y) \in R \Leftrightarrow x|y$

  c) $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y < 100$

  d) $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$

- **Príklad 7.**

  a) Koľko existuje rozličných relácií na n-prvkovej množine?

  b) Koľko existuje relácií ekvivalencie na 5-prvkovej množine?

- **Príklad 8.** Nájdite príklad binárnej relácie ktorá je:

  a) reflexívna a symetrická, ale nie je tranzitívna;

  b) reflexívna a tranzitívna, ale nie je symetrická;

  c) symetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna.

- **Príklad 9.** Koľko je takých rôznych relácií ekvivalencie na $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, ktoré majú

  a) presne dve 3-prvkové triedy ekvivalencie;

  b) presne jednu 3-prvkovú triedu ekvivalencie;

  c) jednu 4-prvkovú triedu ekvivalencie;

  d) aspoň jednu triedu ekvivalencie s troma alebo viac prvkami?

- **Príklad 10.** Nech A je neprázdna množina. Nech B je pevne zvolená podmnožina A. Definujme na $\mathcal{P}(A)$ reláciu R nasledovne: Pre $X, Y \subseteq A$ je $(X, Y) \in R$ ak $B \cap X = B \cap Y$.

  a) Overte, že R je ekvivalencia na $\mathcal{P}(A)$.

  b)Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{1, 2\}$ nájdite rozklad $\mathcal{P}(A)$ indukovaný reláciou R.

  c)Ak $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$ nájdite triedu ekvivalencie $[X]$, ak $X = \{1, 3, 5\}$.

  d) Koľko je tried ekvivalencie v rozklade indukovanom R, pre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$?