

Texty k přednáškám

Pravděpodobnost

Ivan Nagy, Jitka Homolová

Obsah

1 Úvod	3
1.1 Datový soubor a jeho popis (Skripta str. 10)	3
1.2 Charakteristiky datových souborů	4
1.3 Kvantily (Skripta str. 23)	4
1.4 Charakteristiky polohy (Skripta str. 24–26)	5
1.5 Charakteristiky variability (Skripta str. 27–30)	5
2 Pravděpodobnost	7
2.1 Základní pojmy (Skripta str. 33)	7
2.2 Definice pravděpodobnosti	8
2.3 Příklady	10
3 Náhodné jevy (Skripta str. 33-43)	12
3.1 Možná vyjádření jevů	12
3.2 Operace s jevy (Skripta str. 34)	12
3.3 Pravděpodobnosti jevů (Skripta str. 37)	13
3.4 Nezávislé pokusy (Skripta str. 41)	15
3.5 Závislé pokusy	16
3.6 Úplná pravděpodobnost a Bayesův vzorec (Skripta str. 42)	17
3.7 Procvičování	18
4 Náhodná veličina (Skripta str. 44)	21
4.1 Náhodná veličina (Skripta str. 44)	21
4.2 Distribuční funkce (Skripta str. 45)	22
4.3 Hustota pravděpodobnosti (Skripta str. 50)	24
5 Náhodný vektor	27
5.1 Úplný popis náhodného vektoru	27
5.2 Marginální a podmíněné rozdělení náhodného vektoru	31
6 Charakteristiky náhodné veličiny (Skripta str. 51)	33
6.1 Střední hodnota, rozptyl a kovariance (Skripta str. 52)	33
6.2 Operátorové vyjádření střední hodnoty a rozptylu	35
6.3 Momenty náhodné veličiny	35

6.4	Kvantil spojité náhodné veličiny (Skripta str. 53)	37
6.5	Charakteristiky náhodného vektoru	38
7	Rozdělení diskrétní náhodné veličiny	41
7.1	Alternativní rozdělení (Skripta str. 56)	41
7.2	Binomické rozdělení (Skripta str. 56)	42
7.3	Poissonovo rozdělení (Skripta str. 58)	42
7.4	Negativní binomické rozdělení	43
7.5	Diskrétní rovnoměrné rozdělení (Skripta str. 58)	44
8	Rozdělení spojité náhodné veličiny	45
8.1	Rovnoměrné rozdělení (Skripta str. 59)	45
8.2	Normální rozdělení (Skripta str. 59)	46
8.3	Logaritmicko-normální rozdělení	48
8.4	Exponenciální rozdělení (Skripta str. 62)	49
8.5	Rozdělení gama	50
8.6	Rozdělení beta	50
8.7	Rozdělení χ^2 (Skripta str. 63)	50
8.8	Rozdělení t (Studentovo) (Skripta str. 63)	50
8.9	Rozdělení F	51
9	Funkce náhodné veličiny	52
9.1	Funkce jedné náhodné veličiny	52
9.2	Funkce náhodného vektoru	55
10	Počítání s náhodnými veličinami a vektory	59
11	Limitní věty	62
11.1	Konvergence náhodné posloupnosti	62
11.2	Čebyševova nerovnost	62
11.3	Zákon velkých čísel	63
11.4	Centrální limitní věta	63
12	Rezerva	66
12.1	Kvantily a kritické hodnoty	66
12.2	Příklady k rozdělením NV	66

12.3 Přepočítání sdružené hp na marginální a podmíněnou	68
---	----

1 Úvod

Základní situace, kterou zde budeme zkoumat, je následující.

Sledujeme určitý proces a na něm pozorujeme výsledky. Např.:

- Sledujeme dopravní komunikaci v jednom pevném místě a zaznamenáváme intenzitu dopravního proudu (počet vozidel, která projedou za jednu hodinu).
- Sledujeme řidiče přijíždějící na křižovatku a měříme dobu, za kterou přehlednou situaci v celé křižovatce.
- Dotazujeme se náhodně vybraných občanů na jejich věk a zaměstnání.

Všimněme si hned první situace - měření intenzity provozu:

Proces tvoří projíždějící auta na sledovaném místě. Zde nemáme na mysli žádné konkrétní auto ani dobu měření. Auta tudy projíždějí náhodně a v náhodně vybranou minutu sledování můžeme naměřit libovolnou intenzitu (samozřejmě nezápornou a nějak shora omezenou). Proces lze reprezentovat množinou všech možných hodnot, které na něm lze změřit.

Data je množina intenzit, které jsme získali opakovaným měřením. Tato data se již samozřejmě týkají konkrétních okamžiků měření a tedy i konkrétních aut, která zde projížděla.

Proces, jako množina všech možných hodnot, je většinou tak velký, že je nemožné, nebo alespoň nevhodné, zkoumat všechny jeho prvky. Data, která na procesu změříme (nebo se na ně dotážeme) o souboru vypovídají. Je však třeba mít na paměti, že:

1. Data nemohou proces postihnout dokonale, ale vypovídají o něm vždy s určitou chybou.
2. To, co z dat odvodíme (a tedy i chyba s kterou to odvodíme) závisí na jejich konkrétním výběru. Vybereme-li náhodně nová data, dostaneme trochu jiný výsledek.

Cílem statistiky bude právě odhad vlastností procesu z měřených dat, ale také odhad chyby, které jsme se mohli dopustit.

V následujícím odstavci se budeme zabývat **daty** a jejich popisem.

1.1 Datový soubor a jeho popis (Skripta str. 10)

Statistická jednotka je objekt, který zkoumáme.

Statistická veličina je vlastnost objektu, kterou zkoumáme.

Datový soubor je množina změřených (pozorovaných) hodnot statistické veličiny.

Třídění datového souboru je zápis souboru pomocí hodnot (intervalů hodnot) dat a jejich četností.

PŘÍKLAD: Dotázali jsme se 10 občanů na jejich věk, zaokrouhlený na celé desítky. Obdrželi jsme data

50, 50, 30, 40, 60, 30, 50, 60, 30, 50.

Statistická jednotka je občan. *Statistická veličina* je věk, zaokrouhlený na desítky. *Datový soubor* tvoří hodnoty, které jsme obdrželi jako odpovědi. *Tříděný datový soubor* je dán tabulkou

hodnota	30	40	50	60
četnost	3	1	4	2

PŘÍKLAD: Každou hodinu měříme intenzitu dopravního proudu na dálnici D1. Po 15 měřeních jsme získali data

10, 12, 31, 63, 59, 65, 52, 61, 72, 65, 44, 51, 69, 65, 54.

Statistická jednotka je dálnice D1 v místě měření. *Statistická veličina* je intenzita dopravního proudu. *Datový soubor* jsou naměřené hodnoty. *Tříděný datový soubor* pro intervalové třídění s intervaly $I_1 = (0; 19)$, $I_2 = (20; 39)$, $I_3 = (40; 59)$, $I_4 = (60; 79)$ je v tabulce

interval	I_1	I_2	I_3	I_4
četnost	2	1	5	7

POZNÁMKA: Tabulka četností zobrazená ve sloupcovém grafu se nazývá histogram.

POZNÁMKA: Jestliže místo absolutních četností použijeme relativní četnosti, tj. absolutní četnosti dělené celkovým počtem měření, dostaneme tzv. *empirickou hustotu pravděpodobnosti*. O hustotě pravděpodobnosti budeme hovořit později.

1.2 Charakteristiky datových souborů

Datový soubor je obrovská a nepřehledná množina čísel. Charakteristiky ukazují konkrétní vlastnosti datového souboru, jako např. průměr, proměnlivost, rozsah hodnot apod.

1.3 Kvantily (Skripta str. 23)

α -kvantil je hodnota, která dělí uspořádaný datový soubor na dvě části tak, že hodnot menších než kvantil je $\alpha \cdot 100\%$ (a větších hodnot je $(1 - \alpha) \cdot 100\%$).

Dolní kvartil (prostřední kvartil, horní kvartil) je 0.25-kvantil (0.5-kvantil, 0.75-kvantil).

PŘÍKLAD: Datový soubor 5 8 3 2 6 5 9 4 8 4 nejdříve uspořádáme 2 3 4 4 5 5 6 8 8 9 a určíme:

0.15-*kvantil* je 2.5 (15% je mezi 2 a 3 - bereme průměr), *dolní kvartil* je 3.5, *prostřední kvartil* je 5 a *horní kvartil* je 8.

1.4 Charakteristiky polohy (Skripta str. 24–26)

Průměr je součet hodnot datového souboru dělený jejich počtem.

PŘÍKLAD: Datový soubor je $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. **Průměr** je

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Tříděný datový soubor s hodnotami X_i a četnostmi $n_i, i = 1, 2, \dots, N$. **Průměr** je

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i n_i.$$

P O Z N Á M K A: Podíly $n_i/n = p_i$ jsou relativní četnosti a odpovídají pravděpodobnostem jednotlivých hodnot. Po dosazení do předchozího vzorce dostaneme $\bar{x} = \sum_{i=1}^N X_i p_i$. Toto vyjádření průměru odpovídá vzorci pro střední hodnotu (bude!).

Medián je prostřední kvartil datového souboru, tj hranice, která dělí uspořádaný datový soubor na dvě stejně velké části.

PŘÍKLAD: Pro datový soubor 1 1 2 3 3 5 6 7 9 9 9 (s lichým počtem členů) je to prostřední hodnota, tedy 5. Pro datový soubor 1 1 2 3 3 5 6 7 9 9 se sudým počtem členů je to průměr ze dvou členů uprostřed, tedy $(3 + 5)/2 = 4$. Pro tříděný datový soubor je třeba se zamyslit:

X_i	3	5	8
n_i	7	5	12.

Dohromady je $7 + 5 + 12 = 24$ hodnot. To je sudý počet, prostřední budou 12. a 13. hodnoty v pořadí. V první skupině je 5 - to je málo, v první a druhé je $7 + 5 = 12$ a to je akorát. Prostřední hodnoty budou 5 a 8 a tedy medián je 6.5.

Modus je hodnota datového souboru s největší četností.

PŘÍKLAD: Pro datový soubor 2 6 2 5 3 2 5 je modus 2 protože dvojka se v souboru vyskytuje nejčastěji.

1.5 Charakteristiky variability (Skripta str. 27–30)

Rozpětí je rozdíl mezi minimální a maximální hodnotou datového souboru.

PŘÍKLAD: Pro datový soubor 2 6 2 5 3 2 5 je rozpětí rovno $6 - 2 = 4$.

Výběrový rozptyl udává proměnlivost hodnot datového souboru. Pro soubor s hodnotami x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ je dán vzorcem

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{nebo} \quad \frac{n}{n-1} (\overline{x^2} - \bar{x}^2),$$

kde v druhém vzorci (tzv. výpočetní vzorec): \bar{x} je průměr všech hodnot x a $\overline{x^2}$ je průměr kvadrátů x .

Rozptyl je podobný výběrovému rozptylu s tím rozdílem, že součet kvadrátů se dělí počtem dat n a ne počtem zmenšeným o jedničku.

PŘÍKLAD: Výpočet průměru a rozptylu je nejlépe provést v tabulce (např. tabulkovém procesoru EXCEL)

	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$

Průměr	\bar{x}	—	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

2 Pravděpodobnost

Než přistoupíme k definici *pravděpodobnosti*, uvedeme základní matematické struktury, o které se definice opírá.

2.1 Základní pojmy (Skripta str. 33)

Základem všech úvah klasické pravděpodobnosti je *náhodný pokus* a jeho *výsledky*.

Náhodný pokus je určitý experiment, který i za relativně stálých podmínek dává různé výsledky.

PŘÍKLAD: 1. Hod mincí s výsledky "Rub" a "Líc". 2. Hod kostkou s výsledky z množiny $\{1, 2, \dots, 6\}$. 3. Doba životnosti přístroje s výsledky z \mathbb{R}^+ atd.

Základní prostor Ω je množina všech bezprostředních výsledků náhodného pokusu. Tyto výsledky považujeme za dále nedělitelné a nazýváme je *elementární jevy*.

P O Z N Á M K A: *Vezmeme-li například pokus hod kostkou, budou bezprostředními výsledky přirozená čísla od 1 do 6. To ale nejsou všechny výsledky, které nás mohou zajímat. Můžeme se ptát např. na výsledek "padne sudé číslo", který sice není bezprostředním výsledkem, ale určitým výsledkem pokusu jistě je. Všimněme si, že zmíněný výsledek můžeme vyjádřit jako množinu bezprostředních výsledků $\{2, 4, 6\}$, které jej splní (tedy nastane-li libovolný z nich, řekneme, že náš výsledek nastal - padne-li 4, padlo sudé číslo).*

Náhodný jev je libovolná podmnožina základního prostoru Ω .

P O Z N Á M K A:

1. Náhodnými jevy jsou i prázdná množina (tzv. **jev nemožný** - výsledek, který nemůže nikdy nastat) a celá množina Ω (tzv. **jev jistý** - jev, který nastane vždy). Například: "padne -1" a "padne menší než 10".
2. Náhodnými jevy jsou i jednoprvkové podmnožiny, a tedy elementární jevy jsou také náhodnými jevy.
3. Výsledek pokusu lze vyjádřit buď pomocí výroku "padne sudé číslo" nebo pomocí odpovídající množiny elementárních jevů $\{2, 4, 6\}$. Množinové vyjádření je jediné, zatímco slovních (výrokových) vyjádření téže skutečnosti může být několik. Např. výroky "padne celé číslo", "padne záporné číslo", "padne větší než 6" mají jediné množinové vyjádření \emptyset .

Jevové pole \mathcal{A} je množina všech možných jevů, tedy množina všech podmnožin základního prostoru.

P O Z N Á M K A: *Po pravdě řečeno, jevové pole nemusí být množina úplně všech podmnožin základního prostoru. Stačí, jestliže je to neprázdný systém podmnožin Ω , splňující dvě podmínky*

1. je uzavřený na doplňky, tj. je-li $A \in \mathcal{A}$ pak i $A' \in \mathcal{A}$,
2. je uzavřený na sjednocení, tj. je-li spočetný systém jevů $A_i \in \mathcal{A}$, pak take $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$.

Z těchto dvou podmínek plyne i uzavřenost na průniky a skutečnost, že jevové pole musí vždy obsahovat prázdnou množinu i celý základní prostor. (Dokázat!)

2.2 Definice pravděpodobnosti

Definice 2.1 (Axiomatická pravděpodobnost (Skripta str. 36))

Pravděpodobnost je reálná funkce $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jevovém poli \mathcal{A} , splňující následující podmínky:

1. je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,
2. je normovaná, tj. $P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{P}$ a $P(\Omega) = 1$,
3. je σ aditivní, tj. pro spočetný systém jevů, takových že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ platí $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$.

Komentář k definici

1. Uvedená axiomatická definice pravděpodobnosti neříká, jaké budou hodnoty pravděpodobnosti jednotlivých jevů, ale pouze vymezuje, jaké vlastnosti musí mít funkce, aby mohla být nazvána pravděpodobností. Návod na přiřazení hodnot pravděpodobností dávají definice klasická a statistická. Ty uvedeme vzápětí.
2. Trojice objektů (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá **pravděpodobnostní prostor** a představuje úplný popis zkoumaného náhodného pokusu.
3. Všimněte si, že popisem náhodného pokusu není určení správného výsledku (jako třeba při řešení lineární rovnice), ale pouze vyjmenování všech možných výsledků a přiřazení pravděpodobností, se kterou jednotlivé výsledky nastanou.

PŘÍKLAD: Uvažujme pokus: hod nepoškozenou mincí. Potom bude

$$\Omega = \{R, L\}, \quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \{L\}, \{R\}, \{R, L\}\}$$

a pravděpodobnost P , která je definována na množině \mathcal{A} určíme tak, že přiřadíme pravděpodobnosti jednotlivým prvkům Ω (elementárním jevům, bezprostředním výsledkům). Využijeme skutečnosti, že jsou nedělitelné (tj. nemají nic společného a tedy jsou disjunktní) a podle 3. axiomu bude pravděpodobnost každého jevu dána součtem pravděpodobností jeho elementárních jevů, které obsahuje. Tedy, je-li $J \in \mathcal{A}$ jev, pak

J	\emptyset	$\{R\}$	$\{L\}$	$\{R, L\}$
$P(J)$	0	0.5	0.5	1

Definice 2.2 (Klasická pravděpodobnost (Skripta str. 32))

Za předpokladu, že

1. náhodný pokus má konečný počet bezprostředních výsledků,
2. každý bezprostřední výsledek je stejně pravděpodobný,

je pravděpodobnost P jevu J dána vzorcem

$$P = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

kde m je počet možných bezprostředních výsledků, při kterých nastane jev J a n je počet všech bezprostředních výsledků.

Komentář k definici

1. Klasická definice provádí výpočet hodnot pravděpodobnosti jednotlivých jevů, a to na základě teoretického rozboru pokusu. Určené pravděpodobnosti jsou "přesné" v tom smyslu, že pokaždé, když tuto pravděpodobnost počítáme, dostaneme stejný výsledek. Nevýhodou této definice je, že při složitějším pokusu je teoretický rozbor příliš složitý.

PŘÍKLAD: Určete pravděpodobnost jevu "padne sudé číslo" při jednom hodu nepoškozenou kostkou.

Jev "padne sudé číslo" je reprezentován množinou $\{2, 4, 6\}$. Jsou tedy tři možnosti, jak tento jev nastane, a tedy $m = 3$. Celkový počet bezprostředních výsledků je $n = 6$ (šest možných čísel při hodu kostkou). Proto je $P = m/n = 3/6 = 1/2$.

Definice 2.3 (Statistická pravděpodobnost)

Jestliže provedeme N pokusů a jev J při nich nastane $N1$ krát, definujeme pravděpodobnost P jevu J takto

$$P = \frac{N1}{N}. \quad (2)$$

Komentář k definici

1. Statistická definice se při výpočtu pravděpodobnosti opírá o experimenty. Proto je jednoduchá, což je její veliká výhoda. Výsledek, který dostaneme ale není "úplně přesný". Provedeme-li dvě stejné série pokusů, dostaneme pokaždé jinou hodnotu pravděpodobnosti a ta se ještě bude lišit od klasické. Statistické zákony ale zaručují, že statistická a klasická hodnota pravděpodobnosti leží "blízko" sebe.

PŘÍKLAD: Uvažujme stejný pokus jako pro klasickou definici, tj. hod kostkou, a sledujme pravděpodobnost jevu "padne sudé číslo".

V tomto případě ale neanalyzujeme možnosti, jak může padnout sudé číslo, ale prostě házíme. Provedeme např. $N = 100$ hodů a jestliže při nich padlo např. $N1 = 52$ krát sudé číslo, pak řekneme, že statistická pravděpodobnost padnutí sudého čísla je $P = 52/100 = 0.52$.

2.3 Příklady

PŘÍKLAD 1: Uvažujme pokus postupného losování dvou korálek z krabice, kde je 5 bílých a 3 modré korálky. Losování provádíme s vrácením prvního vylosovaného korálku. Chceme určit pravděpodobnost, že oba vybrané korálky budou bílé. \diamond

Označíme b bílý a m modrý korálek. Potom

$$\begin{aligned}\Omega &= \{[b, b], [b, m], [m, b], [m, m]\} \\ \mathcal{A} &= \{\emptyset, \{[b, b]\}, \{[b, m]\}, \{[m, b]\}, \{[m, m]\}, \\ &\{[b, b], [b, m]\}, \{[b, b], [m, b]\}, \{[b, b], [m, m]\}, \{[b, m], [m, b]\}, \{[b, m], [m, m]\}, \{[m, b], [m, m]\}, \\ &\{[b, b], [b, m], [m, b]\}, \{[b, b], [b, m], [m, m]\}, \{[b, b], [m, b], [m, m]\}, \{[b, m], [m, b], [m, m]\}, \\ &\{[b, b], [b, m], [m, b], [m, m]\}\end{aligned}$$

Pravděpodobnosti jednotlivých jevů určíme takto: Při prvním tahu je 5 příznivých pro bílý a 3 příznivé pro modrý, celkem je $5 + 3 = 8$ možností, Bude tedy $P(b) = 5/8$ a $P(m) = 3/8$. Protože po prvním tahu korálek vrátíme, je při druhém tahu situace zcela stejná, a tedy i pravděpodobnosti jsou stejné. Použitím pravidla součinu dostáváme: pravděpodobnost bílý a bílý je

$$P([b, b]) = P(b)P(b) = \frac{5}{8} \frac{5}{8} = \frac{25}{64}.$$

Podobně bychom určili i pravděpodobnosti ostatních elementárních jevů, tj. jednotlivých uspořádaných dvojic. Pravděpodobnosti dalších jevů (tj. skupin elementárních jevů) dostaneme sečtením pravděpodobností všech elementárních jevů, které sledovaný jev obsahuje. Tedy např. pravděpodobnost jevu "první bílý" (který obsahuje elementární jevy $[b, b]$ a $[b, m]$) bude

$$P(\{[b, b], [b, m]\}) = \frac{5}{8} \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

Poznámka: Tuto pravděpodobnost lze také spočítat jako "první bílý" a "druhý cokoliv", tj. $\frac{5}{8} \cdot 1$.

PŘÍKLAD 2: Uvažujme nyní stejnou situaci jako v předchozím příkladě, ale s tím rozdílem, že první vytažený korálek nevrátíme. \diamond

V tomto případě se bude situace v prvním a druhém tahu lišit (jeden korálek bude vybrán a bude v druhém tahu chybět). Tažení např. bílého v prvním tahu můžeme označit stejně jako minule b (zde jsou situace shodné). Tažení bílého v druhém tahu musíme ale označit $b|b$, nebo $b|m$, protože chybí buď bílý, nebo modrý korálek (čteme: bílý, za podmínky, že v prvním tahu byl vybrán bílý, atd.). Pravděpodobnosti prvního tahu budou stejné, jako v předchozím příkladě. Pravděpodobnosti druhého tahu (tzv. podmíněné pravděpodobnosti) budou $P(b|b) = \frac{4}{7}$, $P(b|m) = \frac{5}{7}$, $P(m|b) = \frac{3}{7}$ a $P(m|m) = \frac{3}{7}$. Pravděpodobnost oba bílé pak logicky bude: pravděpodobnost bílý v prvním tahu a (krát) pravděpodobnost bílý v druhém tahu, za podmínky bílého v prvním tahu, tj.

$$P([b, b]) = P(b)P(b|b) = \frac{5}{8} \frac{4}{7} = \frac{5}{14}.$$

Pravděpodobnost "první bílý" bychom dostali takto

$$P(\{[b, b], [b, m]\}) = P(b)P(b|b) + P(b)P(m|b) = \frac{5}{8} \frac{4}{7} + \frac{5}{8} \frac{3}{7} = \frac{5}{8}.$$

PŘÍKLAD 3: Sledujeme dobu čekání na tramvaj, která jezdí přesně v pětiminutovém intervalu, za předpokladu, že naše příchody na zastávku jsou zcela náhodné. \diamond

V našem pokuse, který spočívá v měření doby, která uplyne od našeho příchodu do příjezdu tramvaje, jsou dvě krajní situace: "čekáme 0 minut", když tramvaj právě přijela a "čekáme 5 minut", když tramvaj právě ujela. Ostatní doby čekání musí ležet někde mezi těmito dvěma mezemi. Je tedy

$$\Omega = \langle 0, 5 \rangle.$$

\mathcal{A} je množina všech podmnožin Ω . Jsou to jevy typu: "budeme čekat méně než a ", "budeme čekat více než b ", "budeme čekat méně než c nebo více než d " a pod. Obecně jsou to tedy všechny uzavřené i otevřené podintervaly intervalu $\langle 0, 5 \rangle$, jejich sjednocení a průniky.

Protože naše příchody na zastávku jsou zcela náhodné, budou "všechny možné doby čekání stejně pravděpodobné". Proto pravděpodobnost jevu reprezentovaného intervalem (nebo sjednocením intervalů) dána jeho relativní délkou, tj, jeho délkou (nebo součtem délek) dělenou maximální délkou intervalu, což je 5. Tedy pravděpodobnost, že budeme čekat maximálně jednu minutu, je $P(\langle 0, 1 \rangle) = \frac{1}{5} = 0.2$.

P O Z N Á M K A: *Poslední uvedený příklad se týká "spojitého pokusu", kdy základní prostor je množina nespočetná. Všimněme si, pravděpodobnost každého jediného bezprostředního výsledku je nula. Jestliže je nespočetně mnoho možných výsledků, pak skutečně pravděpodobnost, že nastane právě jeden z nich je nulová. Prakticky má tedy smysl mluvit ne o pravděpodobnosti bodu, ale pouze o pravděpodobnosti intervalu.*

3 Náhodné jevy (Skripta str. 33-43)

Náhodné jevy jsou hlavním předmětem našeho zájmu při zkoumání náhodného pokusu. Jsou to právě ty otázky, na které si chceme v pravděpodobnostním smyslu odpovědět. Tedy ne zda pokus dopadne určitým způsobem, ale s jakou pravděpodobností tak dopadne. Proto se podíváme blíže na počítání s jevy a určování jejich pravděpodobností.

3.1 Možná vyjádření jevů

1. Jev je **výrok** o výsledku náhodného pokusu. Např. při hodu kostkou: J_1 : "padne sudé číslo", J_2 : "padne větší než 6", J_3 : "padne iracionální číslo".
2. Jev je **množina** bezprostředních výsledků pokusu, pro které je výrok o jevu pravdivý. Např. $J_1 = \{2, 4, 6\}$, $J_2 = J_3 = \emptyset$.

P O Z N Á M K A: Všimněme si, že množinové pojetí jevů je vhodnější nejen pro další práci s jevy (s množinami se lépe pracuje než s výroky), ale také proto, že je jednoznačné. Více různých výroků může označovat stejnou skutečnost, jejich množinové vyjádření je však jediné.

3.2 Operace s jevy (Skripta str. 34)

Nadále budeme jevy chápat jako množiny. Zajímá nás proto, jaký význam na nich mají operace **doplňek**, **průnik** a **sjednocení**.

Jev opačný je jev, jehož množinové vyjádření je doplňkem jevu původního.

P Ř Í K L A D: Jev opačný k jevu "padne sudé číslo" je jev "padne liché číslo", protože $\{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6\}' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 4, 6\}$.

Průnik (dvou) jevů je jev, jehož množinové vyjádření je průnik množinových vyjádření (obou) jevů.

P Ř Í K L A D: Průnik jevů "padne sudé" a "padne menší než 5" je jev $\{2, 4\} = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$.

P O Z N Á M K A: Průnik dvou jevů obsahuje právě ty bezprostřední výsledky pokusu, které splní oba původní jevy. Vyjadřuje tedy současné nastoupení obou jevů a lze jej vyjádřit výrokem: "nastane první jev a současně i druhý jev".

Sjednocení (dvou) jevů je jev, jehož množinové vyjádření je sjednocením množinových vyjádření (obou) jevů.

P Ř Í K L A D: Sjednocením jevů "padne sudé číslo" a "padne větší než 2" je jev $\{2, 3, 4, 5, 6\} = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\}$.

Neslučitelné jevy Jevy J a K jsou neslučitelné, jestliže platí $J \cap K = \emptyset$.

PŘÍKLAD: Jevy "padne sudé" a "padne liché" jsou neslučitelné, protože $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$.

Na základě těchto operací převzatých z teorie množin zavedeme ještě jeden pojem, který již nemá přesnou množinovou analogii a je čistě pravděpodobnostní.

Podmíněný jev Uvažujme dva jevy J a K . Jevem J , podmíněným jevem K nazveme jev $J|K$ a rozumíme jím jev J za podmínky, že víme (někdo nám to třeba prozradil), že nastal jev K .

PŘÍKLAD: Jev "padlo sudé" | "padlo menší než 4" je $\{2\}$, protože vybíráme sudé z množiny $\{1, 2, 3\}$ a to je jen dvojka.

POZNÁMKA: Je zřejmé, že v podmíněném jevu $J|K$ jsou jen elementární jevy z průniku obou jevů (nemohlo nastat nic jiného, než je v K). Jako příznivé možnosti pro výpočet pravděpodobnosti bereme prvky průniku $J \cap K$, jako všechny možné bereme jen prvky jevu K (jevu z podmínky), protože nic jiného nemohlo nastat.

3.3 Pravděpodobnosti jevů (Skripta str. 37)

Pravděpodobnost opačného jevu J' k jevu J je $P(J') = 1 - P(J)$.

Pravděpodobnost průniku jevů J a K se značí $P(J, K) = P(J \cap K)$ a nazývá se *sdužená pravděpodobnost*.

Pravděpodobnost sjednocení jevů J a K je

$$P(J \cup K) = P(J) + P(K) - P(J, K).$$

Dále budeme definovat důležitý pojem podmíněné pravděpodobnosti. Pomocí ní lze zkoumat vzájemnou závislost či nezávislost jevů.

Definice 3.1 (Podmíněná pravděpodobnost (Skripta str. 38))

Podmíněná pravděpodobnost $P(J|K)$ je pravděpodobnost podmíněného jevu $J|K$. Za podmínky $P(K) \neq 0$ ji určíme podle vzorce

$$P(J|K) = \frac{P(J, K)}{P(K)}, \quad (3)$$

kde $P(J, K)$ je sdužená pravděpodobnost.

Komentář k definici

1. Všimněme si, že vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost přesně odpovídá tomu, co jsme řekli v poznámce k podmíněnému jevu. Podle klasické definice je $P(J, K) = m_{J,K}/n$ a $P(K) = m_K/n$, kde $m_{J,K}$ je počet prvků průniku $J \cap K$, m_K je počet prvků jevu K a n je počet všech elementárních jevů. Potom $P(J|K) = \frac{m_{J,K}/n}{m_K/n} = m_{J,K}/m_K$, což je počet prvků průniku, vztahovaný k počtu prvků jevu K , který je v podmínce.

2. Upravíme-li definiční vzorec podmíněné pravděpodobnosti tak, že jej násobíme jmenovatelem zlomku $P(K)$, dostaneme důležitý vzorec pro rozvoj sdružené pravděpodobnosti (J, K)

$$P(J, K) = P(K)P(J|K). \quad (4)$$

Bereme-li J a K jako jevy definované na dvou po sobě jdoucích pokusech, pak je význam předchozího vzorce jasný: chceme určit pravděpodobnost toho, že nastane J a K (což je součin). Pravděpodobnost jevu v prvním pokusu je jednoduchá, pravděpodobnost jevu v druhém pokusu už musí brát v úvahu výsledek prvního pokusu, protože jím může být ovlivněna. Situaci budeme demonstrovat na následujícím příkladě.

PŘÍKLAD: Na skladě je 20 výrobků, z nichž 2 jsou vadné. Pokus spočívá v postupném výběru dvou výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že oba vybrané výrobky budou dobré? \diamond

Situace při prvním tahu je jasná. Dobrých (příznivých) je 18, všech je 20. Pravděpodobnost dobrého v prvním tahu je $P(d1) = 18/20 = 9/10$. Jev $d2$ "dobrý v druhém tahu" již ale záleží na tom, co se stalo v prvním tahu: pravděpodobnost "dobrý za podmínky dobrého" je $P(d2|d1) = 17/19$. Podle pravidla součinu tedy bude

$$P(d1, d1) = P(d1)P(d2|d1).$$

To zcela odpovídá vzorci (4).

Pomocí podmíněné pravděpodobnosti budeme nyní definovat *nezávislost* jevů. Jevy, které nejsou nezávislé, nazýváme *závislé* jevy.

Definice 3.2 (Nezávislost jevů) (Skripta str. 40)

Jevy J a K jsou nezávislé, jestliže platí

$$P(J|K) = P(J), \quad \text{nebo} \quad P(J, K) = P(J)P(K). \quad (5)$$

Komentář k definici

1. První z uvedených vzorců se většinou bere jako definiční, druhý jako odvozený

$$P(J, K) = \underbrace{P(J|K)}_{\text{definice}} P(K) = \underbrace{P(J)}_{\text{nezávislost}} P(K).$$

Pro další použití je důležitější druhý vzorec, který také ukazuje, že nezávislost je vlastnost symetrická.

PŘÍKLAD: V továrně je stroj na výrobu určitého výrobku. Je známo, že stroj vyrobí 10% vadných výrobků. Od stroje postupně odebereme dva výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že oba budou dobré? \diamond

Protože stroj dává stále 10% vadných výrobků (tj. 1 z 10), nezávisle na tom, jaký výrobek jsme právě odebrali, bude pravděpodobnost dvou dobrých

$$P(d1, d2) = P(d1)P(d2) = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

Zde se jedná o nezávislé jevy, pro které se vzorec (4) takto zjednoduší.

PŘÍKLAD: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne sudý součet? \diamond

Sudý součet je: sudé a sudé nebo liché a liché, tj ($P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$);
nebo na matici

$$\begin{array}{cccccc}
 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12
 \end{array}
 \Rightarrow P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne sudý součet, víme-li, že ani na jedné kostce nepadla šestka. \diamond

Podmíněná pravděpodobnost. Řešíme na matici

$$\begin{array}{cccccc|c}
 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
 \hline
 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12
 \end{array}
 \Rightarrow m = 13; n = 25; P = \frac{13}{25}. \text{ Není stejné jako předtím.}$$

Totéž, ale s podmínkou, že na první kostce nepadla šestka. \diamond

Sami. Vyjde: $m = 15$ a $n = 30$. Tj. $P = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$. Je stejné jako v prvním.

POZNÁMKA: Vzhledem ke vzájemnému vztahu jevů J a K má vzorec pro pravděpodobnost sjednocení jeden z následujících tvarů:

$$P(J \cup K) = \begin{cases} P(J) + P(K) - P(J, K) & \text{pro } J, K \text{ obecné,} \\ P(J) + P(K) - P(J)P(K) & \text{pro } J, K \text{ nezávislé,} \\ P(J) + P(K) & \text{pro } J, K \text{ neslučitelné.} \end{cases}$$

3.4 Nezávislé pokusy (Skripta str. 41)

PŘÍKLAD: Střelec střílí nezávisle na terč. Pravděpodobnost zásahu v každém pokusu je 0.7. Jaká je pravděpodobnost, že ve třech pokusech zasáhne právě 2 krát? \diamond

Dva zásahy ve třech pokusech je možno realizovat trojím způsobem (z - zásah, m - mimo)

$$z z m, \quad z m z, \quad m z z$$

Pravděpodobnost zásahu je 0.7, nezásahu je 0.3 a tedy pravděpodobnost každé z uvedených možností, kde jsou 2 zásahy a 1, nezásah (nezávisle) je $0.7^2 \cdot 0.3 = 0.147$. Požadavek bude splněn, jestliže nastane libovolná z možností. Podle pravidla součtu tedy pravděpodobnost dvou zásahů ve třech pokusech bude

$$P(2z) = 3 \cdot (0.7)^2 \cdot 0.3.$$

Předchozí příklad lze zobecnit

Binomická pravděpodobnost Uvažujeme n opakování pokusu, jehož pravděpodobnost úspěchu je p . Pravděpodobnost $P_{n,p}(k)$, že právě k pokusů bude úspěšných, je rovna

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (6)$$

pro $k = 0, 1, \dots, n$.

3.5 Závislé pokusy

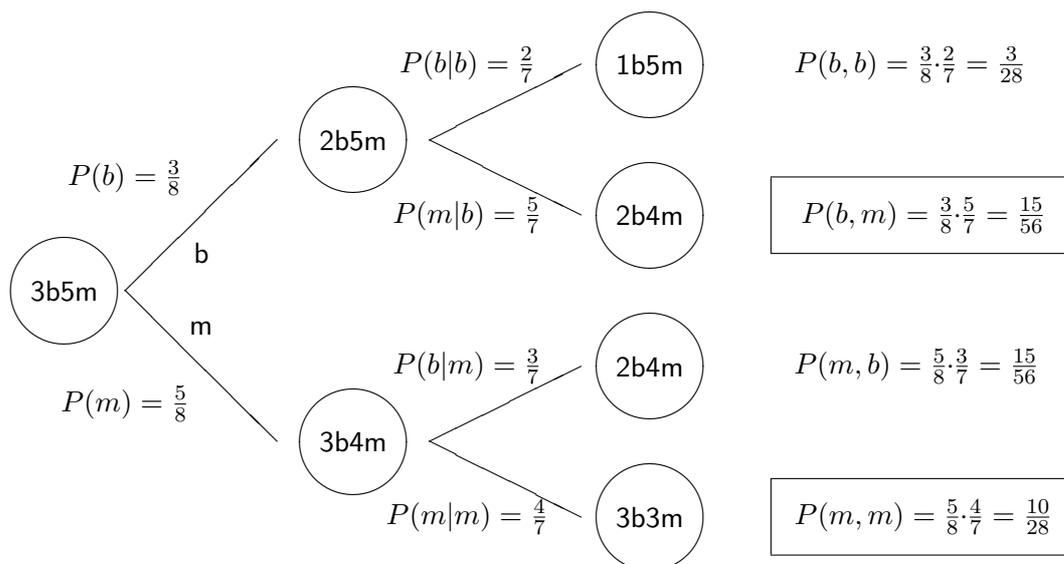
V případě, kdy opakované pokusy jsou závislé, je situace mnohem složitější, protože pravděpodobnosti v každém dalším pokusu závisí na výsledcích předchozích pokusů (viz bílé a modré korálky, dobré a vadné výrobky). Pravděpodobnost jednoho konkrétního stavu výsledků V_i pokusů je dána obecným rozvojem sdružené pravděpodobnosti podle (4) ve tvaru

$$P(V_1, V_2, \dots, V_n) = P(V_1)P(V_2|V_1) \dots P(V_n|V_1, V_2, \dots, V_{n-1}).$$

Je tedy třeba znát všechny podmíněné pravděpodobnosti. Při řešení takové úlohy lze s výhodou použít **pravděpodobnostní strom**. Vysvětlíme jej a jeho použití budeme demonstrovat na příkladě.

PŘÍKLAD: V klobouku jsou 3 bílé (b) a 5 modrých (m) korálů. Postupně, bez vracení, vylosujeme 2 korálky. Jaká je pravděpodobnost, že druhý korálek bude modrý? \diamond

Úlohu budeme řešit pomocí stromu



V tomto grafu kroužky znamenají jednotlivé stavy, čáry jsou přechody mezi stavy. Čára nahoru znamená tažení bílého korálku, dolů černého. U každé čáry je zapsána pravděpodobnost tohoto přechodu. Je to klasická pravděpodobnost, která se opírá vždy o předchozí stav. Význam koncových stavů je dán cestou, kterou jsme do nich dospěli (např. horní koncový stav je b, b) a jejich pravděpodobnosti jsou dány součinem podmíněných pravděpodobností podél příslušné cesty (např. pro horní koncový stav je to $(3/8) \cdot (2/7) = 3/28$).

Možnosti, které nás v našem příkladě zajímají jsou orámované. Celková pravděpodobnost je součtem $P(\text{druhý modrý}) = \frac{15}{56} + \frac{10}{28} = \frac{5}{8}$.

3.6 Úplná pravděpodobnost a Bayesův vzorec (Skriptá str. 42)

Uvažujeme jev (A) jehož pravděpodobnost sledujeme a okolnosti (B_1, B_2, \dots, B_n) , za kterých tento jev nastává. Pro přehlednost uvedeme vzorce pro $n = 3$.

ÚPLNÁ PRAVDĚPODOBNOST určuje pravděpodobnost jevu při všech možných okolnostech. (Počítáme před provedením pokusu.)

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \tag{7}$$

BAYESŮV VZOREC určuje pravděpodobnost okolnosti, když víme, jaký výsledek pokusu nastal. (Počítáme po provedení pokusu.)

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} \tag{8}$$

Obě úlohy budeme demonstrovat na příkladě.

PŘÍKLAD: Na skladě je 70% přístrojů 1. jakosti a 30% 2. jakosti. Pravděpodobnost, že přístroj 1. jakosti pracuje bez poruchy je 0.95, 2. jakosti 0.6.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný přístroj bude bez poruchy?

b) Vybereme jeden přístroj a zjistíme, že je bez poruchy. Jaká je pravděpodobnost, že je to přístroj 1. jakosti? \diamond

Označíme: I – 1. jakost, II – 2. jakost, B – bezporuchový výrobek.

Zadáno: $P(I) = 0.7$, $P(II) = 0.3$, $P(B|I) = 0.95$, $P(B|II) = 0.6$.

a) Úplná pravděpodobnost

$$P(B) = P(B|I)P(I) + P(B|II)P(II) = 0.95 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.845$$

b) Bayesův vzorec

$$P(I|B) = \frac{P(B|I)P(I)}{P(B|I)P(I) + P(B|II)P(II)} = \frac{0.95 \cdot 0.7}{0.95 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.3} = 0.787$$

3.7 Procvičování

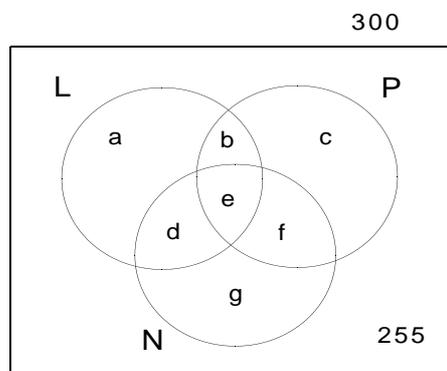
PŘÍKLAD: Na skladě je 300 výrobků. Prohlídkou byly zjištěny následující závady

1. poškozený lak (L) u 37 výrobků,
2. ulomený podstavec (P) u 14 výrobků,
3. nefunkční přístroj (N) u 14 výrobků.

Přístrojů bez závady bylo celkem 255, přístrojů jen s poškrábaným lakem 21, jen s ulomeným stojanem 5 a nefunkčních, ale jinak nepoškozených 2.

Otázka 1: Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady. \diamond

Řešení provedeme v množinovém diagramu



kde, podle zadání, platí

$a = 21$, $c = 5$, $g = 2$ a dále

$$a + b + c + d + e + f + g = 300 - 255$$

$$a + b + d + e = 37$$

$$b + c + e + f = 14$$

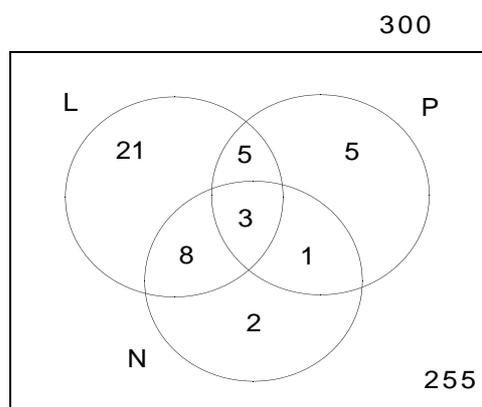
$$d + e + f + g = 14$$

Po dosazení dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} b + d + e + f &= 17 \\ b + d + e &= 16 \\ b + e + f &= 9 \\ d + e + f &= 12 \end{aligned}$$

Řešíme:

$$\begin{aligned} 1 - 2: & \quad f = 1, \\ 1 - 3: & \quad d = 8, \\ 1 - 4: & \quad b = 5, \\ \text{dosadit do 4:} & \quad e = 3. \end{aligned}$$



Odpověď:

$$P = \frac{e}{300} = \frac{3}{300} = \frac{1}{100}.$$

Otázka 2: Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude funkční, ale s poškozeným lakem a ulomeným stojanem. \diamond

Příznivé jsou $L \cap P \cap N'$, možné všechny.

$$P = \frac{b}{300} = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}.$$

Otázka 3: Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude poškrábaný a bez stojanu, víme-li že je funkční. \diamond

Příznivé jsou $L \cap P \cap N'$, možné jsou funkční, t.j. N' . Těch je $300 - d - e - f - g = 300 - 14 = 286$

$$P = \frac{b}{286} = \frac{5}{286}.$$

Zkontrolovat podle definice: Jde o dva jevy: F - funkčnost a Z - závada. Hledáme

$$P(Z|F) = \frac{P(Z, F)}{P(F)}.$$

Je: $P(Z, F) = \frac{5}{300}$ a $P(F) = \frac{300-N}{300}$. 300 se zkrátí a je to totéž.

Otázka 4: Jsou jevy Funkčnost a Závada nezávislé. ◇

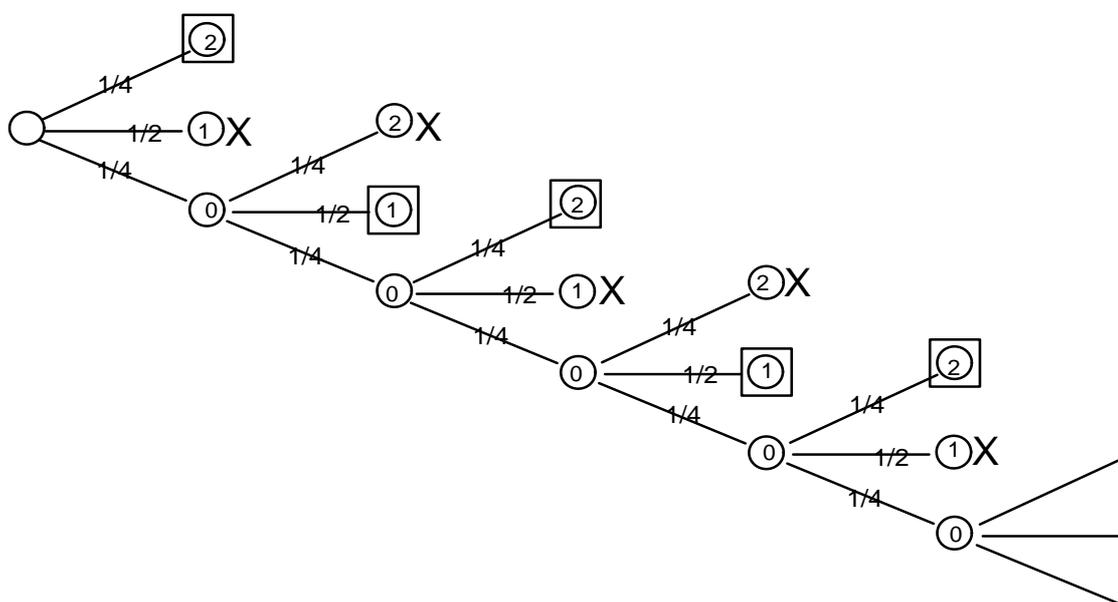
Podmíněnou pravděpodobnost $P(Z|F)$ jsme právě spočítali. Nepodmíněná je

$$P(Z) = \frac{b+e}{300} = \frac{8}{300} = \frac{2}{75}.$$

Protože $P(Z|F) \neq P(Z)$, jsou oba jevy závislé.

PŘÍKLAD: Dva soupeři střídavě hází dvěma mincemi. Pokud padnou dva líce, hráč vyhrává, padne-li jeden líc, hráč prohrává (tj. vyhrává ten druhý) a nepadne-li ani jeden líc, hra pokračuje. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje ten, který začínal házet? ◇

Výpočet provedeme v pravděpodobnostním stromu (rámeček = výhra, X = prohra). Strom je kreslen z hlediska prvního házejícího.



Po cestách od začátku k výhrám dostaneme

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \dots = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{4} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \dots \end{aligned}$$

To je geometrická řada s prvním členem $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{4}$ a kvocientem $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Je tedy

$$P = \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{2}{5}.$$

4 Náhodná veličina (Skripta str. 44)

Při definici pravděpodobnostního prostoru jsme přiřazovali pravděpodobnosti výsledkům náhodného pokusu (elementárním jevům) a jejich skupinám (náhodným jevům). Vymezení všech možných skupin výsledků (jevové pole) a přiřazení pravděpodobností těmto skupinám představuje úplný popis sledovaného procesu. Takový úplný popis jsme ale schopni provést jen v nejjednodušších případech, jako je např. hod kostkou. Většinou, a to zejména v reálných procesech, není takový úplný popis možný - např. když sledujeme intenzitu provozu v daném místě komunikace. Uvažování fyzikální podstaty tohoto pokusu by znamenalo sledovat úmysly všech řidičů, technický stav jejich vozidla, pravděpodobnost, zda vůbec do daného místa dojedou atd. Je zřejmé, že v takovém případě lze buď pouze předpokládat určité standardní "rozdělení" pravděpodobností nebo se uchýlit k nějakému jednoduššímu, byť i neúplnému, popisu takového procesu.

Jedna z možností, jak takový jednodušší popis provést, je uvažovat určitou číselnou charakteristiku - např. průměrnou hodnotu (která určuje hladinu, na které se data pohybují) nebo rozptyl (který udává, jak se v průměru data navzájem liší). To je ale možné jen tehdy, jsou-li výsledky náhodného pokusu (data měřená na procesu) čísla. Jinak je tento popis nemožný. Např. na minci padne "rub" nebo "líc", obojí s pravděpodobností 0,5. Co padne v průměru? A přece, pomoc je velmi jednoduchá. Stačí např. přejmenovat "rub" na 0 a "líc" na 1. Nic z podstaty pokusu se neztratilo a průměr je 0,5. Ten vyjadřuje přesně to, co jsme chtěli. Jde o "férovou korunu".

To, co jsme právě popsali, zajišťuje *náhodná veličina* - výsledkům pokusu přiřazuje reálná čísla. Místo s výsledky pokusu, které mohou mít libovolnou povahu (např. zelená, oranžová, červená), pracujeme s hodnotami náhodné veličiny, tedy s čísly, která reprezentují původní výsledky.

Dále uvedeme definici *náhodné veličiny* (nv) a definice funkcí, které představují úplný popis pro nv. V další kapitole se budeme zabývat charakteristikami nv, které představují neúplný (avšak velmi jednoduchý) popis nv.

4.1 Náhodná veličina (Skripta str. 44)

Definice 4.1 (Náhodná veličina)

Uvažujme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) . Náhodná veličina X je zobrazení prostoru elementárních jevů Ω do množiny reálných čísel $X : \Omega \rightarrow R$, které splňuje podmínku

$$\{E \in \Omega : X(E) \leq x\} \in \mathcal{A} \text{ pro všechna } x \in R \quad (9)$$

Komentář k definici

1. Pokud je množina výsledků, a tedy i množina hodnot nv, konečná nebo spočetná, hovoříme o *diskrétní nv*. V případě nespočetně nekonečného množství hodnot se nv veličina nazývá *spojitá nv*. Příkladem diskrétní nv je hod mincí, kostkou, losování korálek apod. Spojitá nv je spojena např. s pokusem doba čekání na tramvaj, bezporuchová doba funkce přístroje apod.

2. Na uvedené definici je podstatné, že náhodná veličina je zobrazení, a tedy, jak jsme v úvodu řekli, přiřazuje výsledkům pokusu (elementárním jevům) reálná čísla. Zmíněná podmínka je dosti volná (v našich příkladech bude vždy splněna). Její splnění zaručuje existenci úplného popisu nv pomocí distribuční funkce.
3. Pokud jsou výsledky pokusu čísla, lze je přímo ponechat jako hodnoty nv. V opačném případě je možno čísla výsledkům přiřadit prakticky libovolně.
4. Splnění podmínky budeme ilustrovat v následujícím příkladě.

PŘÍKLAD: Uvažujme náhodný pokus "hod nepoškozenou mincí" se stranami "rub" (R) a "líc" (L), pro který platí

$$\begin{aligned} \text{Základní prostor} \quad \Omega &= \{R, L\} \\ \text{Jevové pole} \quad \mathcal{A} &= \{\emptyset, \{R\}, \{L\}, \{R, L\}\} \\ \text{Pravděpodobnost} \quad P(\emptyset) &= 0, \quad P(\{R\}) = P(\{L\}) = 1/2, \quad P(\{R, L\}) = 1 \end{aligned}$$

Definujme náhodnou veličinu takto $X(R) = 0$ a $X(L) = 1$ a ověřme, zda je splněna podmínka z definice nv.

Ověření začneme "odzadu", kde se říká ... pro všechna $x \in R$.

1) Reálnou osu budeme procházet ve třech intervalech: $I_1 : x \in (-\infty, 0)$, $I_2 : x \in (0, 1)$ a $I_3 : x \in (1, \infty)$, kde za hranice intervalů jsou schválně voleny hodnoty nv.

2) Dále pro jednotlivé intervaly označíme množiny

$$M_i = \{E \in \Omega : X(E) \leq x\} \text{ pro } x \in I_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Bude $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{R\}$ a $M_3 = \{R, L\}$ - nakreslete a rozmyslete.

3) Porovnáním s jevovým polem \mathcal{A} tohoto příkladu zjistíme, že skutečně platí $M_i \in \mathcal{A}$ pro všechna $i = 1, 2, 3$ a tedy pro libovolné $x \in R$.

Tím je platnost podmínky ověřena.

P O Z N Á M K A: Je zřejmé, že podmínka bude splněna pro libovolnou volbu hodnot nv; bude splněna dokonce i pro nesmyslnou volbu $X(R) = X(L) \in R$. Podmínka skutečně "hlídá" jen existenci distribuční funkce (bude dále), nikoliv smysluplnost volby.

P O Z N Á M K A: Chceme-li náhodnou veličinu zařadit do kontextu jevové pravděpodobnosti, můžeme ji považovat za ekvivalent náhodného pokusu. Pokus dává výsledky, nv dává čísla, která označují výsledky. Nv je tedy jen jakýsi "pseudonym" pro náhodný pokus. Pod tímto pseudonymem se nám pak s výsledky - čísly lépe pracuje.

4.2 Distribuční funkce (Skripta str. 45)

Stejně jako jsme se v případě náhodného pokusu zajímali o jeho úplný popis, budeme se o něho zajímat i v případě nv. Je jím *distribuční funkce* a *hustota pravděpodobnosti*.

Definice 4.2 (Distribuční funkce)

Pro nv X definujeme distribuční funkce $F(x)$ vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \text{kde } x \in R \tag{10}$$

Komentář k definici

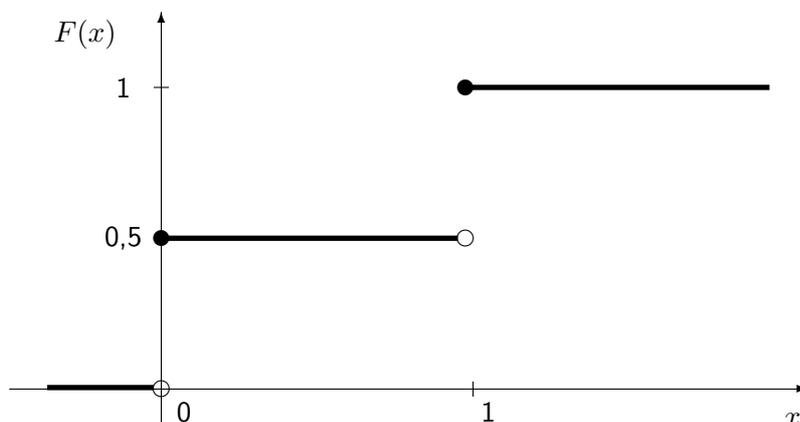
1. Distribuční funkce je funkcí reálné proměnné $x \in R$. Index x označuje náhodnou veličinu, kterou distribuční funkce popisuje. Často se tento index vynechává a náhodná veličina je označena písmenem, které zvolíme za argument funkce.
2. Distribuční funkce přiřazuje pravděpodobnosti všem intervalům typu $(-\infty, x)$ pro reálná x . Připomeňme, že v pravděpodobnostním prostoru tomu bylo obdobně. Jevové pole obsahovalo všechny množiny elementárních jevů (výsledků) a funkce P (pravděpodobnost) jim přiřazovala jejich pravděpodobnosti. Tady jsou elementárními jevy (výsledky) všechna reálná čísla a jako jejich množiny volíme právě všechny intervaly $(-\infty, x)$, $x \in R$.
3. Definice distribuční funkce je společná pro diskrétní i spojitou nv. Jejich průběhy se ale typicky liší. Ukážeme si je v následujících příkladech.

PŘÍKLAD: Nakreslete distribuční funkci náhodné veličiny X pro hod nepoškozenou mincí s výsledky R a L , definovanou výčtem $X(R) = 0$ a $X(L) = 1$.

Tímto pokusem jsme se již zabývali v předchozím příkladě a zjistili jsme, že množiny výsledků M_i odpovídající intervalům I_i pro $I_1 : x \in (-\infty, 0)$, $I_2 : x \in (0, 1)$ a $I_3 : x \in (1, \infty)$ jsou $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{R\}$ a $M_3 = \{R, L\}$. Bude tedy

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & \text{pro } x < 0, \\ P(\{R\}) = 0,5 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ P(\{R, L\}) = 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Protože množina všech hodnot nv je konečná (má jen dva prvky 0 a 1), jedná se o diskrétní nv. Graf její distribuční funkce je na obrázku



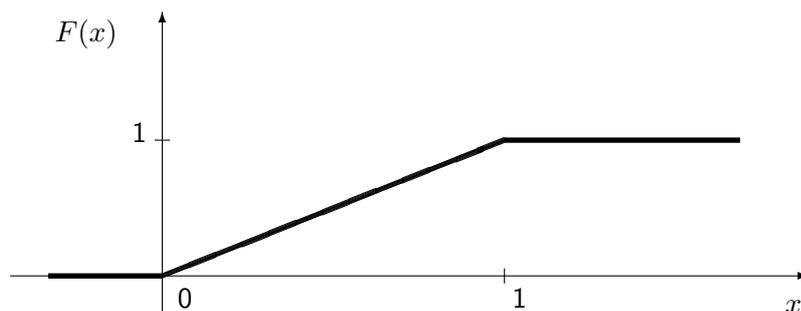
Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je po částech konstantní funkce. Ke skokům dochází jen v jejích hodnotách a velikost skoků je rovna pravděpodobnostem těchto hodnot.

PŘÍKLAD: Nakreslete distribuční funkci náhodné veličiny popisující dobu čekání na tramvaj s pětiminutovým intervalem při náhodném příchodu na zastávku.

Budeme-li uvažovat zcela náhodný příchod, bude pravděpodobnost příjezdu přímo úměrná době čekání a bude-li 5 minutový interval přesný, bude pravděpodobnost příjezdu po 5 minutách čekání rovna jedné. Distribuční funkce tedy bude

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x/5 & \text{pro } x \in \langle 0, 5 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \geq 5. \end{cases}$$

Graf této funkce je na obrázku



Uvedené příklady poukazují na některé obecné vlastnosti distribučních funkcí.

Tvrzení 4.1 (Vlastnosti distribuční funkce (Skriptu str. 79))

1. Distribuční funkce je neklesající na celé reálné ose a
2. platí $F(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow -\infty$ a $F(x) \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow \infty$.
3. Distribuční funkce spojitě nv je spojitá, distribuční funkce diskrétní nv má konečný (spočetný) počet nespojitostí. Ty se nacházejí v hodnotách nv.

Ověření: Tvrzení plyne přímo z definice distribuční funkce a ze skutečnosti, že pravděpodobnost je vždy nezáporná.

4.3 Hustota pravděpodobnosti (Skriptu str. 50)

Distribuční funkce je úplným popisem nv. Její velikou předností je velmi jednoduchá definice, která je společná jak pro diskrétní, tak i pro spojitou nv. Její nevýhodou je, že není příliš vhodná pro běžné použití. Proto se pro popis nv zavádí ještě jedna funkce - **hustota pravděpodobnosti**. Ta je z hlediska popisu náhodné veličiny prakticky ekvivalentní s distribuční funkcí, je velmi vhodná pro použití, její definice je však trochu komplikovanější. V první řadě, je definována jinak pro diskrétní a jinak pro spojitou nv. V případě diskrétní nv se často nazývá **pravděpodobnostní funkce**.

• DISKRÉTNÍ NÁHODNÁ VELIČINA •

Definice 4.3 (Hustota pravděpodobnosti diskrétní nv)

Pro náhodnou veličinu X definujeme *pravděpodobnostní funkci* $f(x)$ vztahem

$$f_X(x) = P(X = x), \quad \text{kde } x \in R \quad (11)$$

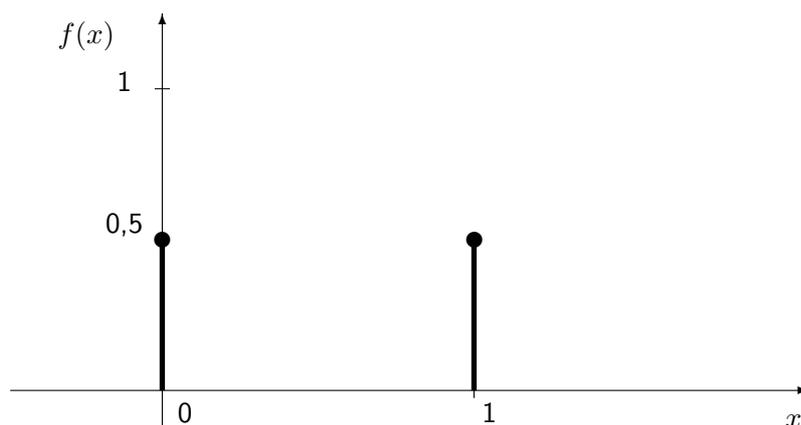
Komentář k definici

1. Definice pravděpodobnostní funkce je velmi jednoduchá. Její hodnoty jsou přímo pravděpodobnosti jevů, označených hodnotami nv.
2. Diskrétní distribuční funkci dostaneme pomocí pravděpodobnostní funkce jako její kumulativní součet (postupné nasčítávání jejích hodnot). Platí tedy vztah

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i),$$

kde x_i jsou realizace X .

PŘÍKLAD: Pro již uvažovaný hod nepoškozenou mincí bude pravděpodobnostní funkce $f(0) = 0,5$ a $f(1) = 0,5$. Její graf je



• SPOJITÁ NÁHODNÁ VELIČINA •

Spojité náhodné veličiny mají nespočetně mnoho hodnot. Pokud bychom chtěli zavést její hustotu analogicky podle spojité, dostali bychom funkci identicky nulovou. To ověříme následující úvahou: když rozdělíme jednotku pravděpodobnosti mezi nespočetně mnoho realizací nv, bude každý díl roven nule. Proto platí: **pravděpodobnost každé jednotlivé realizace spojité náhodné veličiny je rovna nule.**

Hustotu spojité nv proto definujeme takto.

Definice 4.4 (Hustota pravděpodobnosti spojitě nv)

Pro náhodnou veličinu X definujeme *hustotu pravděpodobnosti* $f(x)$ pomocí distribuční funkce $F_X(x)$ vztahem

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (12)$$

nebo v integrálním tvaru

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau.$$

Komentář k definici

1. Druhé vyjádření hustoty pravděpodobnosti je obecnější, protože distribuční funkce nemusí být a často nebývá v každém bodě diferencovatelná.
2. Druhé, integrální, vyjádření hustoty pravděpodobnosti je pro nás významnější i z hlediska interpretace. Tu ukazují následující vzorce:

$$P(X \in (-\infty, b)) = F(b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

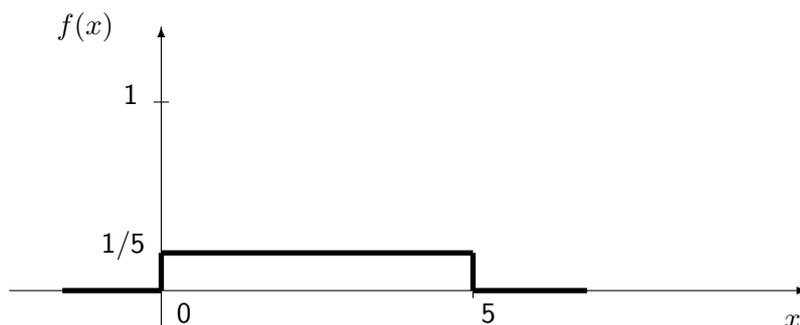
$$P(X \in (a, b)) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Platí tedy: **pravděpodobnost hodnot z intervalu je rovna integrálu z hustoty pravděpodobnosti přes tento interval - tj. ploše pod křivkou hustoty pravděpodobnosti nad uvažovaným intervalem.**

PŘÍKLAD: Pro uvažovaný případ doby čekání na tramvaj bude hustota pravděpodobnosti dána výrazem

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{pro } x \in (0, 5), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

s grafem



5 Náhodný vektor

Dosud jsme se zabývali jednou náhodnou veličinou, tedy, volně řečeno, případem, kdy na sledovaném procesu měříme pouze jedna data. Např. v dopravní oblasti měříme data jen na jediném detektoru. Chceme-li z měřených dat dělat závěry o této oblasti, bude zřejmě vhodné měřit data na více místech. Každé měřící místo je potom spojeno s jednou náhodnou veličinou a v každém okamžiku měření dostáváme celý vektor hodnot měřených dat. O uvažovaných náhodných veličinách hovoříme jako o *náhodném vektoru* nebo o *vícerozměrné náhodné veličině*.

Definice 5.1 (Náhodný vektor (Skripta str. 49))

Uvažujme náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n . *Náhodným vektorem* nazveme uspořádanou n -tici (vektor)

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'. \quad (13)$$

Komentář k definici

1. Apostrof v definici značí transpozici. Náhodný vektor tedy zavádíme jako sloupcový vektor a budeme se této konvence dále držet. V samotné definici je samozřejmě jedno, zda je vektor sloupcový, ale v dalších vzorcích tato konvence přináší lepší srozumitelnost.

5.1 Úplný popis náhodného vektoru

Definice 5.2 (Distribuční funkce náhodného vektoru (Skripta str. 49))

Pro náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ definujeme *distribuční funkci* jako funkci n reálných proměnných vztahem

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n). \quad (14)$$

Komentář k definici

1. Pravděpodobnost na pravé straně definičního vztahu je sdružená pravděpodobnost, a tedy pravděpodobnost průniku (současného nastoupení) jednotlivých podmínek v argumentu. Je to tedy pravděpodobnost, že $X_1 \leq x_1$ a zároveň $X_2 \leq x_2, \dots$ až zároveň $X_n \leq x_n$

2. Vlastnosti distribuční funkce

- (a) Distribuční funkce $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je neklesající v každé své proměnné.
- (b) Platí

$$F(-\infty, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, -\infty, \dots, x_n) = \dots = F(x_1, x_2, \dots, -\infty) = 0,$$

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1,$$

kde znak ∞ je třeba chápat ve smyslu limitního přechodu.

Definice 5.3 (Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru)

Pro diskrétní náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ (tj. náhodný vektor, jehož každá složka může nabývat jen konečného nebo spočetného množství hodnot) definujeme **pravděpodobnostní funkci** vztahem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \quad (15)$$

Komentář k definici

1. Hodnota pravděpodobnostní funkce je tedy rovna pravděpodobnosti, se kterou nastane právě hodnota (x_1, x_2, \dots, x_n) náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$.
2. Distribuční funkci je možno pomocí pravděpodobnostní funkce vyjádřit takto

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{t_1 \leq x_1} \sum_{t_2 \leq x_2} \dots \sum_{t_n \leq x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

3. Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

- (a) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n),$
- (b) $\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1.$

Definice 5.4 (Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru)

Pro spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ (tj. náhodný vektor, jehož každá složka může nabývat nespočetně velkého množství hodnot) definujeme **hustotu pravděpodobnosti** vztahem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (16)$$

Komentář k definici

1. Distribuční funkci je možno pomocí hustoty pravděpodobnosti vyjádřit takto

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

2. Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti

- (a) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$
- (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$

PŘÍKLAD: Při měření rozměrů výrobku lze udělat maximální chybu $\pm e_1$ v šířce a $\pm e_2$ v délce. Tyto chyby označíme X_1 a X_2 a považujeme je za náhodné veličiny. Přitom předpokládáme, že v daných mezích jsou chyby všude stejně pravděpodobné. Určete hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci náhodného vektoru (X_1, X_2) . \diamond

Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru bude definována v rovině (x_1, x_2) reálných čísel a nenulová bude na obdélníku $(-e_1; e_1) \times (-e_2; e_2)$. Protože pravděpodobnost výskytu chyby je zde rovnoměrná, bude její hustota konstantní, tedy $f(x_1, x_2) = k$. Z podmínky na jednotkový integrál plyne, že její hodnota bude

$$\int_{-e_1}^{e_1} \int_{-e_2}^{e_2} k dx_1 dx_2 = k 2e_1 2e_2 = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{4e_1 e_2}.$$

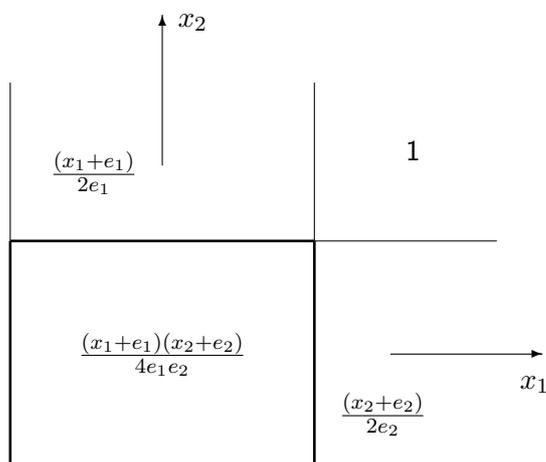
Hustota pravděpodobnosti je tedy

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4e_1 e_2} & \text{pro } x_1 \in (-e_1; e_1) \wedge x_2 \in (-e_2; e_2), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Distribuční funkci získáme integrací hustoty pravděpodobnosti

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{4e_1 e_2} dt_1 dt_2 = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_1 < -e_1 \vee x_2 < -e_2, \\ \frac{(x_1+e_1)(x_2+e_2)}{4e_1 e_2} & \text{pro } x_1 \in (-e_1; e_1) \wedge x_2 \in (-e_2; e_2), \\ \frac{(x_1+e_1)}{2e_1} & \text{pro } x_1 \in (-e_1; e_1) \wedge x_2 \geq e_2, \\ \frac{(x_2+e_2)}{2e_2} & \text{pro } x_1 \geq e_1 \wedge x_2 \in (-e_2; e_2), \\ 1 & \text{pro } x_1 \geq e_1 \wedge x_2 \geq e_2. \end{cases}$$

Distribuční funkce je naznačena na obrázku



0

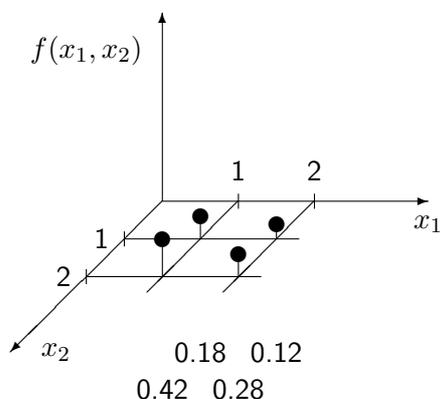
PŘÍKLAD: Sledujeme hod dvěma mincemi. Mince jsou poškozené tak, že na první je pravděpodobnost rubu 0.6 a lícu 0.4 a na druhé padne rub s pravděpodobností 0.3 a líc 0.7. Definujeme náhodnou veličinu $X = (X_1, X_2)$, která rubu přiřadí jedničku a lícu dvojku. Napište pravděpodobnostní a distribuční funkci této náhodné veličiny. \diamond

Jde o diskrétní dvourozměrnou náhodnou veličinu, popisující dva nezávislé pokusy (hod 1. a 2. mincí). Hodnoty pravděpodobnostní funkce určíme výčtem - budou to pravděpodobnosti jednotlivých (dvourozměrných) výsledků, které obdržíme jako součiny pravděpodobností jednotlivých výsledků, tj. $P(\text{"na první padlo ..."}).P(\text{"na druhé padlo ..."}).$

Pravděpodobnostní funkce bude dána tabulkou

$f(x_1, x_2)$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$
$x_2 = 1$	0.18	0.12
$x_2 = 2$	0.42	0.28

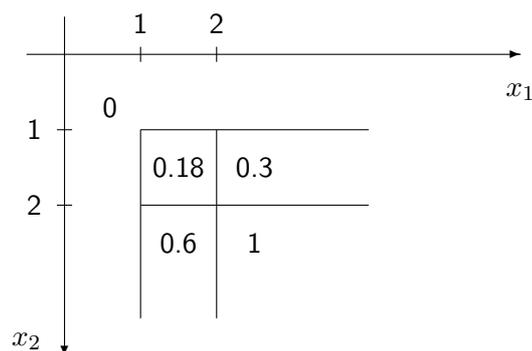
a její graf je na obrázku



Distribuční funkce je

$$F(x_1, x_2) = \sum_{i \leq x_1} \sum_{j \leq x_2} f(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_1 < 1 \vee x_2 < 1, \\ 0.18 & \text{pro } x_1 \in \langle 1, 2 \rangle \wedge x_2 \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 0.6 & \text{pro } x_1 \in \langle 1, 2 \rangle \wedge x_2 \geq 2, \\ 0.3 & \text{pro } x_1 \geq 2 \wedge x_2 \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x_1 \geq 2 \wedge x_2 \geq 2. \end{cases}$$

Hodnoty distribuční funkce v rovině (x_1, x_2) jsou naznačeny na obrázku:



5.2 Marginální a podmíněně rozdělení náhodného vektoru

Definice 5.5 (Marginální pravděpodobnostní funkce)

Pro diskrétní náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ s pravděpodobnostní funkcí $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definujeme *marginální pravděpodobnostní funkci* vztahem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{x_{k+1}} \sum_{x_{k+2}} \dots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (17)$$

Definice 5.6 (Marginální hustota pravděpodobnosti)

Pro spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ s hustotou pravděpodobnosti $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definujeme *marginální hustotu pravděpodobnosti* vztahem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{x_{k+1}} \int_{x_{k+2}} \dots \int_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{k+1} dx_{k+2} \dots dx_n. \quad (18)$$

Komentář k definicím

1. Sumace i integrace v předchozích vzorcích se provádí přes celý obor hodnot příslušných proměnných.
2. Definice marginálních rozdělení je uvedena pro prvních k složek vektoru X . Analogicky však platí i pro libovolně vybrané složky náhodného vektoru.

Definice 5.7 (Podmíněné rozdělení)

Pro náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ s rozdělením $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definujeme *podmíněnou pravděpodobnostní funkci* nebo *hustotu pravděpodobnosti* vztahem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_{k+1}, \dots, x_n)}. \quad (19)$$

Komentář k definicím

1. Podmíněná hustota pravděpodobnosti je dána podílem sdružené a marginální. Stejně je to i pro pravděpodobnostní funkci.
2. Definice analogicky platí i pro libovolně vybrané složky náhodného vektoru, nikoliv jen pro prvních k složek.

6 Charakteristiky náhodné veličiny (Skripta str. 51)

V úvodní přednášce jsme hovořili o charakteristikách datového souboru. Rovněž jsme se zmínili o vztahu **proces - data**. Budeme-li na náhodnou veličinu pohlížet jako na soubor všech jejích možných hodnot, na nichž je definováno rozdělení pravděpodobností, nabízí se možnost popisu náhodné veličiny pomocí obdobných charakteristik, jako jsme uvedli pro datový soubor. Protože pravděpodobnosti hodnot nejsou stejné, uplatní se vzorce pro tříděná data. Pro diskrétní nv jsou vzorce prakticky stejné, pro spojitou nv se "sumace nahradí integrací".

Charakteristiky nv představují neúplný, avšak velmi jednoduchý, popis nv. Tento neúplný popis v praktických případech často zcela postačí.

Základními charakteristikami nv je *střední hodnota* a *rozptyl*.

6.1 Střední hodnota, rozptyl a kovariance (Skripta str. 52)

• STŘEDNÍ HODNOTA NÁHODNÉ VELIČINY •

Definice 6.1 (Střední hodnota)

Pro **diskrétní nv** X s hodnotami $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s pravděpodobnostní funkcí $f(x)$, resp., **spojitou nv** X s hodnotami z množiny X^* a hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ definujeme *střední hodnotu* $E[X]$ vztahem

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i), \quad \text{resp.}, \quad E[X] = \int_{X^*} x f(x) dx. \quad (20)$$

Komentář k definici

1. Střední hodnota určuje "hladinu", na které se data pohybují.
2. Jedná se skutečně o vzorce pro vážený průměr. Při třídění dat určíme četnosti jednotlivých hodnot; vydělením celkovým počtem n získáme relativní četnosti - pravděpodobnosti, což jsou hodnoty pravděpodobnostní funkce.

$$d : 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 3 \rightarrow \begin{array}{l} x_i: 1 \quad 2 \quad 3 \\ n_i: 5 \quad 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow E[X] = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{5 + 2 + 1} = 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$$

PŘÍKLAD: Určete střední hodnotu náhodné veličiny s pravděpodobnostní funkcí $f(x)$ danou tabulkou

x_i	3	5	7	9
$f(x_i)$	0,22	0,31	0,19	0,28

◇

Podle definice je

$$E[X] = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + x_4 f(x_4) = 3 \cdot 0,22 + 5 \cdot 0,31 + 7 \cdot 0,19 + 9 \cdot 0,28 = 6,06.$$

PŘÍKLAD: Určete střední hodnotu nv X s hodnotami $x = 0, 1, \dots, \infty$, s pravděpodobnostní funkcí $f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ pro $x = 0, 1, \dots, \infty$. \diamond

Opět podle definice je

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda} = \lambda$$

Při úpravách jsme: 1) vynechali první člen sumace, protože je nulový, 2) zkrátili x proti faktoriálu, 3) vytkli jedno λ z mocniny v čitateli, 4) substituovali $x - 1 \rightarrow z$ a 5) využili skutečnosti, že součet členů pravděpodobnostní funkce je roven jedné.

• ROZPTYL NÁHODNÉ VELIČINY •

Definice 6.2 (Rozptyl)

Pro náhodnou veličinu X s pravděpodobnostní funkcí, resp., s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ definujeme **rozptyl** $D[X]$ vztahem

$$D[X] = E[(X - E[X])^2]. \quad (21)$$

Komentář k definici

1. Rozptyl určuje míru "variability" dat, tj. jak moc jsou jednotlivé hodnoty odchýleny od střední hodnoty. Hodnota rozptylu je průměr kvadratických odchylek - veličina porovnatelná s daty je **směrodatná odchylka**, což je odmocnina z rozptylu.
2. Pro diskrétní, resp., spojitou nv lze rozptyl vyjádřit takto

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - E[X])^2 f(x_i), \quad \text{resp.}, \quad D[X] = \int_{X^*} (x - E[X])^2 f(x) dx.$$

PŘÍKLAD: Určíme střední hodnotu náhodné veličiny pro zmíněný případ čekání na tramvaj. Její hustota pravděpodobnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{pro } x \in (0, 5), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Střední hodnota je podle definice (vynecháme integraci tam, kde je $f(x) = 0$.) \diamond

$$E[X] = \int_0^5 x f(x) dx = \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5} dx = \left[\frac{1}{10} x^2 \right]_0^5 = 2,5,$$

což přesně odpovídá našim představám.

Rozptyl opět podle definice

$$D[X] = \int_0^5 (x - 2,5)^2 \frac{1}{5} dx = \frac{25}{12}$$

• KOVARIANCE DVOU NÁHODNÝCH VELIČIN •

Definice 6.3 (Kovariance (Skripta str. 54))

Pro náhodné veličiny X a Y , popsané sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f(x, y)$, definujeme *kovarianci* $\text{cov}(X, Y)$ vztahem

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]. \quad (22)$$

Komentář k definici

1. Pro $X = Y$ kovariance přechází na rozptyl.

6.2 Operátorové vyjádření střední hodnoty a rozptylu

Střední hodnota Pro náhodné veličiny X, Y a konstantu a platí

$$E[a] = a, \quad E[aX] = aE[X], \quad E[X + Y] = E[X] + E[Y],$$

ale

$$E[X^2] \neq E[X]^2, \quad E[XY] \neq E[X]E[Y].$$

Rozptyl Pro náhodné veličiny X, Y a konstantu a platí

$$D[a] = 0, \quad D[a + X] = D[X], \quad D[aX] = a^2 D[X]$$

a pro X, Y nekorelované (bude později) platí

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y].$$

Pro rozptyl platí tzv. výpočetní vzorec

$$D[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2. \quad (23)$$

Odvození: $E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2$

6.3 Momenty náhodné veličiny

Zobecněním střední hodnoty a rozptylu jsou momenty. Ty se dělí na *obecné* a *centrální*.

Definice 6.4 (Momenty)

K -tý obecný, resp., centrální moment náhodné veličiny X definujeme vztahem

$$\mu'_k = E[X^k], \quad \text{resp.}, \quad \mu_k = E[(X - E[X])^k], \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Komentář k definici

1. Z pohledu momentů je **střední hodnota** prvním obecným a **rozptyl** druhým centrálním momentem.

Pro výpočet momentů je užitečná tzv. **momentová funkce**.

Definice 6.5 (Momentová funkce)

Pro náhodnou veličinu X definujeme **momentovou funkci** vztahem

$$m_X(z) = E[e^{zX}] \quad (25)$$

Pomocí momentové funkce lze počítat obecné momenty podle následujícího tvrzení.

Tvrzení 6.1 (Výpočet momentů pomocí momentové funkce)

Jestliže $m_X(z)$ je momentová funkce náhodné veličiny X , pak k -tý obecný moment X určíme takto

- momentovou funkci k -krát derivujeme podle proměnné z ,
- v derivaci položíme $z = 0$.

Je tedy

$$\mu'_k = \left[\frac{\partial^k}{\partial z^k} m_X(z) \right]_{z=0}. \quad (26)$$

Ověření: Podle definice je (pro spojitou nv s oborem hodnot X^* - s diskrétní je to obdobné)

$$m_X(z) = E[e^{zX}] = \int_{X^*} e^{zx} f(x) dx.$$

Derivace k -tého řádu podle z je

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} m_X(z) = \int_{X^*} x^k e^{zx} f(x) dx,$$

a pro $z = 0$ dostáváme

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial z^k} m_X(z) \right]_{z=0} = \int_{X^*} x^k f(x) dx = \mu'_k.$$

Komentář k tvrzení

1. Druhý centrální moment (rozptyl) lze vypočítat z obecného pomocí výpočetního vzorce pro rozptyl

$$D[X] = \mu'_2 - (\mu'_1)^2.$$

P Ř Í K L A D: Pomocí momentové funkce určete střední hodnotu rozdělení s pravděpodobnostní funkcí $f(x)$, zadanou tabulkou

x	1	2	3
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

◇

Podle definice je

$$m_X(z) = \sum_{x=1}^3 e^{zx} f(x) = e^z 0.5 + e^{2z} 0.3 + e^{3z} 0.2$$

Derivace podle z je $\frac{\partial}{\partial z} m'_X(z) = e^z 0.5 + 2e^{2z} 0.3 + 3e^{3z} 0.2$ a pro $z = 0$ dostaneme

$E[X] = \mu'_1 = 0.5 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 = 1.7$. To odpovídá střední hodnotě, vypočtené podle definice.

6.4 Kvantil spojité náhodné veličiny (Skripta str. 53)

Definice 6.6 (Kvantil)

Kvantilem spojité náhodné veličiny X nazveme číslo ζ_α , pro které platí

$$P(X \leq \zeta_\alpha) = F(\zeta_\alpha) = \alpha. \quad (27)$$

Komentář k definici

1. Často (zvláště v americké literatuře) se místo pojmu kvantil zavádí pojem **kritická hodnota** z_α pro který platí $z_\alpha = 1 - \zeta_\alpha$. Je definován jako číslo z_α , pro které platí $P(X > z_\alpha) = \alpha$.
2. Pro diskrétní nv je kvantil definován jako číslo ζ_α , pro které platí $F(\zeta_\alpha) \leq \alpha \wedge F(\zeta_\alpha + 0) \geq \alpha$, kde výraz $\zeta_\alpha + 0$ značí limitu zprava.
3. Kvantily nebo kritické hodnoty hledáme v tabulkách. Pokud je k dispozici počítač s nějakým statistickým programem, lze je většinou určit v tomto programu.

P Ř Í K L A D: Uvažujme spojité rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{pro } x \geq 0 \quad \text{a } 0 \text{ jinde.}$$

Určete α procentní kvantil tohoto rozdělení.

◇

Podle definice je

$$\int_0^{\zeta_\alpha} e^{-x} dx = 1 - e^{-\zeta_\alpha} = \alpha.$$

Odtud $\zeta_\alpha = -\ln(1 - \alpha)$. Pro $\alpha = 0.05$ bude $\zeta_{0.05} = 0.051$.

6.5 Charakteristiky náhodného vektoru

Podobně, jako pro skalární náhodnou veličinu, zavedeme i pro náhodný vektor některé jeho číselné (maticové) charakteristiky, jako jejich sice neúplný, ale zato jednoduchý popis. Ty nejzákladnější jsou vektorová **střední hodnota** a **kovarianční matice**. Než přejdeme k jejich definici, zavedeme určité pojmy, související se skalární náhodnou veličinou.

• POMOCNÉ POJMY •

Nejprve zobecníme pojem střední hodnoty náhodné veličiny (20) a budeme definovat střední hodnotu prvku náhodného vektoru X .

Tvrzení 6.2 (Střední hodnota z prvku vektoru)

Uvažujme n -složkový náhodný vektor \mathbf{X} a jeho r -tou složku X_r . Hustota pravděpodobnosti (hp) náhodného vektoru je $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $f(x_r)$ je marginální hp, kterou jsme dostali integrací sdružené hp přes všechny složky náhodného vektoru kromě r -té složky X_r . Potom pro střední hodnotu z X_r platí

$$E[X_r] = \int_{X_1^*} \int_{X_2^*} \dots \int_{X_n^*} x_r f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{X_r^*} x_r f(x_r) dx_r = \mu_r,$$

kde hvězdičkou značíme obory hodnot jednotlivých složek náhodného vektoru.

Ověření: Tento vztah plyne přímo z definice marginální hp.

Střední hodnota prvku vektoru přes celý náhodný vektor se tedy počítá jako "obyčejná" jednorozměrná střední hodnota přes tento prvek. Odvozenou vlastnost dále použijeme jako motivaci pro definici střední hodnoty náhodného vektoru.

• CHARAKTERISTIKY NÁHODNÉHO VEKTORU •

Definice 6.7 (Střední hodnota náhodného vektoru (Skripta str. 55))

Střední hodnotu náhodného vektoru definujeme jako vektor středních hodnot jeho jednotlivých složek, tj.

$$E[\mathbf{X}] = (E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n])', \quad (28)$$

kde $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ je náhodný vektor.

Komentář k definici

1. Motivací k této definici je Tvrzení 6.2.

PŘÍKLAD: Sledujeme-li intenzitu dopravního proudu na pěti měřených místech dopravní sítě (tj. sledujeme pětirozměrný náhodný vektor intenzit), pak střední hodnotou tohoto náhodného vektoru bude vektor, jehož složky budou střední hodnoty jednotlivých intenzit.

Definice 6.8 (Kovarianční matice náhodného vektoru (Skripta str. 56))

Pro náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ definujeme kovarianční matici $C[\mathbf{X}]$ takto

$$C[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} D[X_1] & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & D[X_2] & \dots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \dots & D[X_n] \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Komentář k definici

1. Kovarianční matice je symetrická a pozitivně definitní.
2. Ve vektorovém zápisu (se sloupcovým vektorem X) lze kovarianční matici psát takto

$$C[\mathbf{X}] = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])'] = E[\mathbf{X}\mathbf{X}'] - E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}]'. \quad (30)$$

První vztah plyne z definice násobení vektorů ve tvaru sloupce a řádky, druhý je obdobou známého výpočetního tvaru pro rozptyl (23).

3. Podobně jako kovarianční matici pro jeden náhodný vektor (což lze považovat za obdobu rozptylu) lze definovat i *vzájemnou kovarianční matici* (jako obdobu kovariance) vztahem

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}])']. \quad (31)$$

PŘÍKLAD: Dvourozměrné diskrétní rozdělení náhodného vektoru $X = (x_1, x_2)$, pro $X_1 = 0, 1$ a $X_2 = 0, 1, 2$, lze zapsat pomocí pravděpodobnostní funkce v formě tabulky

$f(x_1, x_2)$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$
$x_1 = 0$	0.42	0.12	0.06
$x_1 = 1$	0.28	0.08	0.04

Určete střední hodnotu a kovarianční matici tohoto náhodného vektoru. \diamond

Pro určení střední hodnoty budeme počítat střední hodnoty jednotlivých složek náhodného vektoru. Proto potřebujeme marginální pravděpodobnostní funkce. Ty dostaneme "vysčítáním" pravděpodobnostní funkce přes sloupce a řádky

$$f(x_1) = (0.6, 0.4) \quad \text{a} \quad f(x_2) = (0.7, 0.2, 0.1).$$

a střední hodnoty jsou

$$E[X_1] = 0 \times 0.6 + 1 \times 0.4 = 0.4 \quad \text{a} \quad \text{obdobně} \quad E[X_2] = 0.4$$

Střední hodnota náhodného vektoru je tedy

$$E[X] = (0.4, 0.4)'.$$

Pro určení kovarianční matice potřebujeme určit rozptyly a kovariance jednotlivých složek náhodného vektoru.

Rozptyly určíme opět z marginálních rozložení

$$D[X_1] = (0 - 0.4)^2 0.6 + (1 - 0.4)^2 0.4 = 0.24, \quad D[X_2] = 0.44$$

Kovariance

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, X_2) &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} (x_1 - E[X_1])(x_2 - E[X_2])f(x_1, x_2) = \\ &= (0 - 0.4)(0 - 0.4)0.42 + (0 - 0.4)(1 - 0.4)0.12 + (0 - 0.4)(2 - 0.4)0.06 + \\ &+ (1 - 0.4)(0 - 0.4)0.28 + (1 - 0.4)(1 - 0.4)0.08 + (1 - 0.4)(2 - 0.4)0.04 = 0 \end{aligned}$$

Kovarianční matice je tedy

$$\text{Cov} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0 \\ 0 & 0.44 \end{bmatrix}$$

PŘÍKLAD: Uvažujme spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2) \quad \text{pro } x_1, x_2 \in (0, 1), \quad \text{jinak } 0.$$

Určete střední hodnotu a kovarianční matici. ◇

Marginální hustoty pravděpodobností jsou

$$f(x_1) = \int_0^1 f(x) dx_2 = \frac{2}{3}(x_1 + 1) \quad \text{a} \quad f(x_2) = \int_0^1 f(x) dx_1 = \frac{1}{3}(1 + 4x_2)$$

pro $x_1, x_2 \in (0, 1)$ jinak 0.

Střední hodnoty

$$E[X_1] = \int_0^1 x_1 f(x_1) dx_1 = \frac{10}{18} \quad \text{a} \quad E[X_2] = \int_0^1 x_2 f(x_2) dx_2 = \frac{11}{18}.$$

Rozptyly

$$D[X_1] = \int_0^1 (x_1 - E[X_1])^2 f(x_1) dx_1 = \frac{13}{162} \quad \text{a} \quad D[X_2] = \int_0^1 (x_2 - E[X_2])^2 f(x_2) dx_2 = -\frac{19}{972}$$

Kovariance

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, X_2) &= \int_0^1 \int_0^1 (x_1 - E[X_1])(x_2 - E[X_2])f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(x_1 - \frac{10}{18}\right) \left(x_2 - \frac{11}{18}\right) \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Sami doma a porovnat mezi sebou.

7 Rozdělení diskrétní náhodné veličiny

Diskrétní náhodná veličina má konečný nebo spočetný počet realizací.

Distribuční funkce je po částech konstantní funkce se skoky v realizacích. Přírůstky se rovnají pravděpodobnostem realizací.

Pravděpodobnostní funkce je diskrétní s hodnotami v realizacích. Její hodnoty se rovnají pravděpodobnostem realizací.

7.1 Alternativní rozdělení (Skripta str. 56)

Pravděpodobnostní funkce

$$f(x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x} \quad \text{pro } x = 0, 1. \quad (32)$$

P O Z N Á M K A: *To odpovídá našim představám: $f(0) = 1 - \pi$ a $f(1) = \pi$.*

Momentová funkce

$$m_X(z) = \pi e^z - \pi + 1. \quad (33)$$

Ověření: Z definice - $m_X(z) = \sum_{x=0}^1 e^{zx} \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$.

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = \pi, \quad D[X] = \pi(1 - \pi).$$

Ověření: Přímou z definice.

Význam

Náhodná veličina popisuje pokus s dvěma výsledky - "neúspěch" $\rightarrow 0$ a "úspěch" $\rightarrow 1$.

Příklady

Hod mincí: "rub" $\rightarrow 0$, "líc" $\rightarrow 1$.

Výběr výrobku ze skladu: "vadný" $\rightarrow 0$, "dobrý" $\rightarrow 1$.

7.2 Binomické rozdělení (Skripta str. 56)

Pravděpodobnostní funkce

$$f(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} \quad \text{pro } x = 0, 1, \dots, n. \quad (34)$$

Momentová funkce

$$m_X(z) = (\pi e^z - \pi + 1)^n. \quad (35)$$

Ověření:

$$m_X(z) = \sum_{x=0}^n e^{zx} \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \underbrace{(\overset{A}{e^z \pi})^x}_{A} \underbrace{(1 - \pi)^{n-x}}_B = \underbrace{(e^z \pi + 1 - \pi)}_{A+B}^n.$$

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = n\pi, \quad D[X] = n\pi(1 - \pi).$$

Význam

Náhodná veličina popisuje n krát opakovaný pokus s alternativním rozdělením s parametrem π , kdy jako výsledek série pokusů se bere počet úspěchů opakovaných do prvního neúspěchu.

Příklady

N krát opakovaný hod mincí s výsledkem "počet líců".

Výběr n výrobků ze skladu s výsledkem "počet vadných" ve výběru.

Počet chlapců v rodinách se třemi dětmi.

7.3 Poissonovo rozdělení (Skripta str. 58)

Pravděpodobnostní funkce

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad \text{pro } x = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

Momentová funkce

$$m_X(z) = e^{\lambda(e^z-1)} \quad (37)$$

Ověření: $m_X(z) = \sum_x e^{zx} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_x \frac{(e^z \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^z} = e^{\lambda(e^z-1)}$

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = D[X] = \lambda.$$

Význam

Náhodná veličina popisuje limitní případ binomického pokusu, ve kterém platí $n \rightarrow \infty$ a $\pi \rightarrow 0$, přičemž $n\pi = \lambda$ je konečné kladné číslo.

Příklady

1. Sledování provozu v případě malé intenzity, kdy vozidla projíždí osamoceně (nikoliv v proudu). Sledujeme v krátkých časových okamžicích (velké n) a jen občas něco projede (malé π).
2. Náhodný proces rozdělení časových odstupů vozidel na hlavní komunikaci.

7.4 Negativní binomické rozdělení

Pravděpodobnostní funkce

$$f(x) = \binom{x+n-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^x, \quad \text{pro } x = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = \frac{n(1-\pi)}{\pi}, \quad D[X] = \frac{n(1-\pi)}{\pi^2}.$$

Význam

Toto rozdělení popisuje pravděpodobnost, že při nezávislých pokusech s pravděpodobností úspěchu π v každém z pokusů bude n -tému úspěšnému pokusu předcházet právě x neúspěšných pokusů. (Jinak řečeno, pro dosažení n úspěchů s danou pravděpodobností je třeba vykonat $x+n$ pokusů.)

Příklady

1. Používá se v dopravní problematice.
2. Modely šíření infekce (rozdělení četnosti parazitů v rámci hostitelské populace).

7.5 Diskrétní rovnoměrné rozdělení (Skripta str. 58)

Pravděpodobnostní funkce

$$f(x) = \frac{1}{n}, \quad \text{pro } x = x_1, x_2, \dots, x_n \quad (39)$$

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = \bar{x}, \quad D[X] = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

Význam

Tato hustota pravděpodobnosti popisuje rozdělení pravděpodobností mezi konečný počet výsledků pokusu jestliže mezi nimi nejsou žádné preference (všechny jsou stejně pravděpodobné).

Příklady

1. Hod mincí.
2. Hod kostkou.

8 Rozdělení spojité náhodné veličiny

Spojité náhodné veličiny má nespočetný počet realizací.

Distribuční funkce je spojitá, neklesající, pro $x \rightarrow -\infty$ má hodnotu nula, pro $x \rightarrow \infty$ jedna.

Hustota pravděpodobnosti je nezáporná a její integrál od $-\infty$ do ∞ je roven 1. Její integrál od a do b (pro $a < b$) je roven pravděpodobnosti výskytu hodnoty náhodné veličiny v intervalu $\langle a, b \rangle$.

8.1 Rovnoměrné rozdělení (Skriptu str. 59)

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{pro } x \in \langle \mu - h, \mu + h \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (40)$$

Momentová funkce

$$m_X(z) = \frac{1}{2hz} (e^{(\mu+h)z} - e^{(\mu-h)z})$$

Ověření: $m_X(z) = \int_{\mu-h}^{\mu+h} e^{zx} \frac{1}{2h} dx = \frac{1}{2hz} [e^{zx}]_{\mu-h}^{\mu+h} = \frac{1}{2hz} (e^{(\mu+h)z} - e^{(\mu-h)z})$.

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = \mu, \quad D[X] = \frac{h^2}{3}$$

Ověření:

Střední hodnota: $E[X] = \int_{\mu-h}^{\mu+h} x \frac{1}{2h} dx = \frac{1}{4h} [(\mu+h)^2 - (\mu-h)^2] = \mu$.

Rozptyl: $D[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{\mu-h}^{\mu+h} x^2 \frac{1}{2h} dx - \mu^2 = \frac{1}{6h} [(\mu+h)^3 - (\mu-h)^3] - \mu^2 =$
 $= \frac{6\mu^2h + 2h^3}{6h} - \mu^2 = \frac{h^2}{3}$.

Význam

Náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením popisuje situaci, kdy a) její hodnoty nesmí překročit pevně stanovené meze a b) uvnitř těchto mezí není důvod považovat některé hodnoty za více a jiné za méně pravděpodobné.

Příklady

1. Pohyb automobilu po komunikaci, kdy náhodná veličina určuje příčnou polohu automobilu na jednosměrné vozovce (např. vzhledem k pravému okraji vozovky). Výskyt automobilu kdekoli na vozovce připouštíme stejně dovolený (pravděpodobný), pohyb mimo vozovku je zakázaný.

8.2 Normální rozdělení (Skripta str. 59)

Hustota pravděpodobnosti

$$\begin{array}{cc} \text{normované} & \text{obecné} \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, & \text{resp., } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \end{array} \quad (41)$$

Momentová funkce

$$m_X(z) = e^{\frac{z^2}{2}}, \quad \text{resp., } m_X(z) = e^{z\mu + \frac{z^2\sigma^2}{2}}. \quad (42)$$

Ověření:

$$\begin{aligned} m_X(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \left| \text{substituce : } y = \frac{x-\mu}{\sigma} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z(y\sigma+\mu)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \left| \text{doplnění na čtverec} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z\mu + \frac{z^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-z\sigma)^2} dy = \\ &= \left| \text{substituce : } v = y - z\sigma \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z\mu + \frac{z^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = e^{z\mu + \frac{z^2\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

P O Z N Á M K A: V posledním kroku předchozího odvození jsme využili skutečnost, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Tento vztah pro normální rozdělení nyní dokážeme.

Označíme: $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ a budeme počítat kvadrát (to je trik)

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

No, proč ne? Dále zavedeme polární souřadnice

$$\begin{array}{l} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \end{array}, \quad \begin{array}{l} \rho = 0 : \infty, \\ \varphi = 0 : 2\pi \end{array}, \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \quad J = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \rho$$

A pokračujeme

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2} \rho d\rho d\varphi = \left| \begin{array}{l} \rho^2/2 = a \\ \rho d\rho = da \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-a} da d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$\text{a tedy } I = \sqrt{2\pi}.$$

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = 0, \quad D[X] = 1, \quad \text{resp.}, \quad E[X] = \mu, \quad D[X] = \sigma^2.$$

Ověření:

Z momentové věty

střední hodnota: $\frac{dm}{dz} = (\mu + \sigma^2 z)e^{\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2}$ a pro $z = 0$ dostaneme μ .

druhý obecný moment: $\frac{d^2m}{dz^2} = \sigma^2 e^{\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2} + (\mu + \sigma^2 z)^2 e^{\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2}$ a pro $z = 0$ je to $\sigma^2 + \mu^2$

Význam

Normální rozdělení je základním a nejčastěji se vyskytujícím rozdělením spojité náhodné veličiny. Normální rozdělení dostaneme v případě, kdy porucha v náhodném pokuse je tvořena vzájemným působením řady malých a navzájem nezávislých náhod.

Příklady

1. Písek, který se sype z kyblíčku na pískoviště. Náhodná veličina je poloha zrníček písku → na zemi se vytvoří kopeček (gaussovka).
2. a další.

PŘÍKLAD: Dvojezměrné normální rozdělení má sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|r|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)'r^{-1}(x - \mu)\right\},$$

kde

$x = [x_1, x_2]'$ je dvouzměrný náhodný vektor,

$\mu = [\mu_1, \mu_2]'$ je střední hodnota x ,

$r = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ je kovarianční matice x a

$|r| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2$ značí determinant matice r .

Marginální hustoty pravděpodobnosti jsou

$$f_1(x_1) = N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{a} \quad f_2(x_2) = N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Podmíněné hustoty pravděpodobnosti jsou

$$f_{12}(x_1|x_2) = N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2}\right) \quad \text{a} \quad f_{21}(x_2|x_1) = N\left(\mu_2 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}\right)$$

P O Z N Á M K A: *Marginální a podmíněné rozdělení lze odvodit tak, že v exponentu sdružené hustoty pravděpodobnosti roznásobíme a vzniklý kvadratický výraz doplníme ne čtverec v jedné z proměnných. Ten výraz, který obsahuje jen jednu proměnnou je marginální hustota pravděpodobnosti, zbytek je marginální. Provést na cvičení (pokud nebude na cvičení čas, tak odvození následuje).*

Inverze kovarianční matice r

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Sdružená hustota pravděpodobnosti

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \left[\sigma_2^2(x_1 - \mu_1)^2 - 2\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) + \sigma_1^2(x_2 - \mu_2)^2 \right] \right\}$$

Přechod na podmíněnou a marginální hustotu pravděpodobnosti provedeme doplněním exponentu na čtverec: pokračujeme s hranatou závorkou

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 \left[(x_1 - \mu_1)^2 - 2\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2) \right)^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^4}(x_2 - \mu_2)^2 \right] + \sigma_1^2(x_2 - \mu_2)^2 = \\ = \sigma_2^2 \left[x_1 - \mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2) \right]^2 + \left(\sigma_1^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} \right) (x_2 - \mu_2)^2 \end{aligned}$$

a celý exponent

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \left[x_1 - \mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2) \right]^2 - \frac{1}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} (x_1 - \mu_1)^2 = \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_2^2}} \left[x_1 - \left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2) \right) \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_2^2} (x_2 - \mu_2)^2 \end{aligned}$$

Konec odvození. To první je exponent podmíněné a to druhé marginální hustoty pravděpodobnosti.

8.3 Logaritmicko-normální rozdělení

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\log x - \mu}{\sigma} \right)^2} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (43)$$

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad D[X] = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Význam

Má-li náhodná veličina X normální rozdělení, pak veličina $Y = e^X$ má rozdělení logaritmicke-normální.

Příklady

1. Intenzita dopravního proudu při středním a vyšším provozu.

8.4 Exponenciální rozdělení (Skripta str. 62)

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x-A}{\delta}} & \text{pro } x \geq A, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (44)$$

Střední hodnota a rozptyl

$$E[X] = A + \delta \quad D[X] = \delta^2$$

Spočítat doma. Když to nepůjde, spočítáme později.

Význam

Exponenciální rozdělení má následující charakteristiku: jestliže X interpretujeme jako dobu do poruchy přístroje a tento přístroj pracoval do okamžiku a bez poruchy, pak pravděpodobnost poruchy přístroje v následujícím časovém intervalu Δ (tj. v časovém úseku $(a, a + \Delta)$) je stejná, jako v časovém úseku $(0, \Delta)$, tedy u přístroje, který dosud nebyl v provozu. Této vlastnosti lze využít např. pro popis doby životnosti přístroje, ohroženého vnější náhodnou příčinou, bez uvažování stárnutí.

Příklady

1. Teorie spolehlivosti.
2. Teorie front.

8.5 Rozdělení gama

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m)\delta^m} x^{m-1} e^{-x/\delta}, \quad x \geq 0, \quad \text{jinak } 0 \quad (45)$$

kde funkce gama je definována vztahem

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt.$$

a platí pro ni $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$ [$= m!$ pro m celé].

8.6 Rozdělení beta

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{B(m_1, m_2)} x^{m_1-1} (1-x)^{m_2-1}, \quad x \in (0, 1), \quad \text{jinak } 0 \quad (46)$$

kde funkce beta je definována vztahem

$$B(m_1, m_2) = \int_0^1 t^{m_1-1} (1-t)^{m_2-1} dt$$

a platí pro ni $B(m_1, m_2) = \Gamma(m_1)\Gamma(m_2)/\Gamma(m_1 + m_2)$.

8.7 Rozdělení χ^2 (Skripta str. 63)

Náhodnou veličinu X s rozdělením χ^2 s ν stupni volnosti dostaneme takto

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} U_i^2, \quad (47)$$

kde U_i jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$.

Rozdělení této náhodné veličiny je rozdělení Γ pro $m = \nu/2$ a $\delta = 2$, kde ν je parametr rozdělení χ^2 , který se nazývá "počet stupňů volnosti" a jeho význam je dán vztahem (47).

Toto rozdělení je asymetrické - pro $x < 0$ je nula. Na kladné poloose nejprve roste (pro $\nu > 1$), dosahuje maxima a potom klesá k nule. (Dělá jeden hrb.)

8.8 Rozdělení t (Studentovo) (Skripta str. 63)

Náhodnou veličinu X se studentovým rozdělením s ν stupni volnosti dostaneme takto

$$X = \frac{U}{\sqrt{\chi^2(\nu)/\nu}}, \quad (48)$$

kde U je náhodná veličina s rozdělením $N(0, 1)$ a $\chi^2(\nu)$ značí náhodnou veličinu s rozdělením χ^2 a ν stupni volnosti.

Toto rozdělení je symetrické, dosti podobné normálnímu rozdělení, avšak je v něm mnohem více neurčitosti (lze z něho generovat i značně odlehlé realizace).

8.9 Rozdělení F

Náhodnou veličinu X s rozdělením F a stupni volnosti ν_1 a ν_2 dostaneme takto

$$X = \frac{\chi^2(\nu_1)/\nu_1}{\chi^2(\nu_2)/\nu_2}, \quad (49)$$

kde $\chi^2(\nu_1)$, resp., $\chi^2(\nu_2)$ značí náhodné veličiny s rozdělením χ^2 s ν_1 , resp., ν_2 stupni volnosti.

Tvarem se toto rozdělení podobá rozdělení χ^2 .

9 Funkce náhodné veličiny

9.1 Funkce jedné náhodné veličiny

V praxi se často setkáváme s určitými funkcemi náhodné veličiny.

PŘÍKLAD: Opakovaně měříme konstantní vzdálenost a a měřicí přístroj je zatížen náhodnou chybou E . Pak měřený signál je $Y = a + E$, a tedy je funkcí náhodné veličiny E .

Zajímá nás rozdělení (hustota pravděpodobnosti) funkce Y , jestliže známe rozdělení (hustotu pravděpodobnosti) argumentu funkce, tj. náhodné veličiny E .

Definice 9.1 (Funkce náhodné veličiny)

Je-li X náhodná veličina, pak náhodná veličina Y definovaná

$$Y = h(X)$$

se nazývá *funkcí* náhodné veličiny X .

Komentář k definici

1. Zavedení funkce náhodné veličiny je právě to, co přispívá k možnosti praktického využití pravděpodobnosti. V praxi totiž často analyzujeme určité (deterministické) vztahy, ve kterých jsou některé veličiny neurčité (např. ovlivněné poruchou). Pracujeme tedy s funkcí náhodné veličiny.

PŘÍKLAD 1: Uvažujme opět měření délky a . Náhodnou veličinou bude chyba měření E a její funkcí Y bude tatáž chyba, ale vyjádřená v jiných jednotkách, tedy $Y = kE$. Navíc předpokládáme, že chybu E zaokrouhlujeme tak, že může nabývat jen konečného počtu hodnot. Ty označíme $-2, -1, 0, 1, 2$. Víme, že pravděpodobnosti těchto hodnot (tj. pravděpodobnostní funkce E) je dána tabulkou

e	-2	-1	0	1	2
$f_E(e)$	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

Jaká bude pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y ? \diamond

Protože transformační funkce je vzájemně jednoznačná, je odpověď velmi jednoduchá. Pravděpodobnosti jednotlivých výsledků se samozřejmě nezmění, ať je vyjádříme jakkoli (v centimetrech, metrech nebo kilometrech).

Nové vyjádření výsledků získáme z transformační funkce: $y = kx$. Dosadíme do předchozí tabulky, pravděpodobnosti ponecháme a nová pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y je

y	$-2k$	$-k$	0	k	$2k$
$f_Y(y)$	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

PŘÍKLAD 2: Uvažujme dále předchozí příklad, ale jako funkci chyby E vezmeme její absolutní odchylku $Y = |E|$. \diamond

Protože tato funkce není prostá, je situace složitější. Nejprve je třeba určit možné realizace nové náhodné veličiny Y a zjistit, které realizace mohou nastat více způsoby. Jejich pravděpodobnosti je třeba sečíst. Zjevně platí $Y = 0, 1, 2$, přičemž hodnota 1 vznikla z hodnot -1 a 1 ; hodnota 2 z hodnot -2 a 2 . Výsledná tabulka pravděpodobnostní funkce Y bude

y	0	1	2
$f_Y(y)$	0.5	0.3	0.2,

kde $0.3 = 0.1 + 0.2$ a $0.2 = 0.1 + 0.1$ z původní tabulky.

To, co jsme nyní naznačili na příkladech pro diskrétní náhodnou veličinu, pro kterou je situace jednoduchá, upřesníme dále pro spojitou náhodnou veličinu.

Tvrzení 9.1 (Transformace hustoty pravděpodobnosti)

Je-li X spojitá náhodná veličina s realizacemi x a s hustotou pravděpodobnosti $f_X(x)$ a $y = h(x)$ je ryze monotónní funkce (tj. buď rostoucí nebo klesající), má náhodná veličina Y definovaná $Y = h(X)$ hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ určenou vztahem

$$f_Y(y) = f_X[h^{-1}(y)] \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|, \quad (50)$$

kde $h^{-1}(y)$ je funkce inverzní k funkci $y = h(x)$.

Ověření: Pro rostoucí funkci h je distribuční funkce $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \leq h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y))$$

a hustota pravděpodobnosti $f_Y(y)$ je

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(h^{-1}(y))}{dy} = f_X(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

Pro klesající funkci h platí

$$F_Y(y) = 1 - P(Y \leq y) = 1 - P(h(X) \leq y) = 1 - P(X \leq h^{-1}(y)) = 1 - F_X(h^{-1}(y))$$

a hustota pravděpodobnosti je

$$f_Y(y) = -f_X(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

Protože derivace rostoucí funkce je kladná a pro klesající funkci záporná, lze oba případy vyjádřit pomocí absolutní hodnoty tak, jak jsme uvedli v (50).

Komentář ke tvrzení 9.1

1. Uvedené tvrzení platí pro případ **spojité náhodné veličiny**, kdy transformační funkce h je **skalární funkcí skalárního argumentu** a je na celém svém definičním oboru **monotónní**.
2. Příklad diskrétní náhodné veličiny lze řešit jednoduše podle základních definičních vzorců. Postup je patrný z předchozího příkladu.

3. V případě, kdy funkce h není monotónní, je situace komplikovanější. Pro transformovanou distribuční funkci $F_Y(y)$ potom platí

$$F_Y(y) = \sum_j P(X \in I_j) = \sum_j \int_{I_j} f_X(x) dx,$$

kde I_j označuje j -tý interval na ose x , pro který platí $h(x) \leq y$.

Hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ dostaneme opět derivací distribuční funkce $F_Y(y)$. (Příklad následuje.)

4. O případu, kdy h je (vektorovou) funkcí více proměnných, se zmíníme později.

PŘÍKLAD: Pro transformační funkci $Y = X^2$ a zvolené y dostaneme právě jeden interval I , pro který platí $x^2 \leq y$. Tento interval je $I = \langle -\sqrt{y}, \sqrt{y} \rangle$. Pro distribuční funkci $F_Y(y)$ a $y > 0$ platí

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \in \langle -\sqrt{y}, \sqrt{y} \rangle) = \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f_X(x) dx = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

pro $y \leq 0$ je $F_Y(y) = 0$.

Hustotu pravděpodobnosti dostaneme derivací distribuční funkce

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})],$$

pro $y > 0$ a $f_Y(y) = 0$, pro $y \leq 0$.

Příklady

PŘÍKLAD 1: Uvažujeme diskrétní náhodnou veličinu X s hodnotami $x_i = i\frac{\pi}{2}$ pro $i = 1, 2, \dots, 10$. Pravděpodobnostní funkce $f_X(x)$ přiřazuje těmto hodnotám pravděpodobnosti $f_X(x_i) = (11 - i)/55$. Určete pravděpodobnostní funkci $f_Y(y)$, jestliže $Y = \sin(X)$. \diamond

x	$\frac{\pi}{2}$	$2\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{2}$	$4\frac{\pi}{2}$	$5\frac{\pi}{2}$	$6\frac{\pi}{2}$	$7\frac{\pi}{2}$	$8\frac{\pi}{2}$	$9\frac{\pi}{2}$	$10\frac{\pi}{2}$
$f_X(x)$	$\frac{10}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{7}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{5}{55}$	$\frac{4}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{55}$
$y = \sin(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

Odtud plyne $y \in \{-1, 0, 1\}$ a

$$\begin{aligned} f_Y(-1) &= \frac{8}{55} + \frac{4}{55} = \frac{12}{55}, \\ f_Y(0) &= \frac{9}{55} + \frac{7}{55} + \frac{5}{55} + \frac{3}{55} + \frac{1}{55} = \frac{5}{11}, \\ f_Y(1) &= \frac{10}{55} + \frac{6}{55} + \frac{2}{55} = \frac{18}{55}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 2: Uvažujme spojitou náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti $f_X(x)$ a její transformaci $Y = aX + b$, a, b konstanty, $a \neq 0$.

Určete hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$. \diamond

Funkce je monotónní, inverzní funkce je $x = \frac{y-b}{a}$, a její derivace $\frac{1}{a}$. Tedy platí

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

PŘÍKLAD 3: Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti $f_X(x) = 1/3$ pro $x \in (-1, 2)$ a jinde rovnu nule. Napište distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = |X|$. \diamond

Transformační funkce není monotónní, proto nelze přímo použít vzorec (50). Budeme postupovat podle poznámky 3 k tomuto vzorci.

Pro dané $y \geq 0$ hledáme intervaly I_j hodnot x , pro které platí $h(x) \leq y$ tj. $|x| \leq y$. Takový interval je jediný: $I = \{x : x \in (-y, y)\}$. Podle zmíněné poznámky je:

$$F_Y(y) = P(X \in (-y, y)) = \int_{-\infty}^y f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{-y} f_X(x) dx$$

Po dosazení konkrétní hustoty pravděpodobnosti a integraci po částech dostaneme

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ \frac{2}{3}y & \text{pro } y \in (0, 1) \\ \frac{1}{3}(y+1) & \text{pro } y \in (1, 2) \\ 1 & \text{pro } y \geq 2 \end{cases}$$

Hustotu pravděpodobnosti dostaneme derivací

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ \frac{2}{3} & \text{pro } y \in (0, 1) \\ \frac{1}{3} & \text{pro } y \in (1, 2) \\ 0 & \text{pro } y \geq 2 \end{cases}$$

PŘÍKLAD 4: Uvažujme spojitou náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti $f_X(x) = 1/\pi$ pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, jinde nula. Najděte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \text{tg}(X)$. \diamond

Funkce je monotónní na $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ a její obor hodnot je $y \in \mathbb{R}$. Inverzní funkce je $x = h^{-1}(y) = \text{arctg}(y)$ a její derivace $x' = \frac{dh^{-1}(y)}{dy} = 1/(1+y^2)$. Hledaná hustota pravděpodobnosti bude

$$f_Y(y) = f_X(x) |x'| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}.$$

9.2 Funkce náhodného vektoru

Tak, jako pro jednu náhodnou veličinu, budeme uvažovat funkci náhodného vektoru. Nejprve budeme uvažovat skalární funkci vektorového argumentu.

Definice 9.2 (Funkce více náhodných veličin)

Jsou-li X_1, X_2, \dots, X_n náhodné veličiny, pak náhodná veličina Y definovaná

$$Y = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

se nazývá **funkcí** náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n .

Komentář k definici

1. Definovali jsme skalární funkci vektorového argumentu. Pokud by náhodná veličina Y byla rovněž vektor, stejně bychom mohli definovat i vektorovou funkci.

PŘÍKLAD: Sledujme pokus "hod kostkou" s náhodnou veličinou "počet bodů". Budeme uvažovat dva hody. Výsledku prvního přiřadíme náhodnou veličinu X_1 a druhému X_2 . Náhodnou veličinu Y definujeme $Y = \max(X_1, X_2)$, tedy jako větší z obou padlých čísel. \diamond

Náhodná veličina Y může tedy nabývat hodnot 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pravděpodobnosti jednotlivých hodnot určíme podle klasické definice. Všech možných dvojic hodnot obou hodů je 36. Příznivé možnosti určíme tak, že výsledek hodů uspořádáme do matice a v ní určíme maxima

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6		1	2	3	4	5	6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6		2	2	3	4	5	6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6		3	3	3	4	5	6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6	→ max →	4	4	4	4	5	6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6		5	5	5	5	5	6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6		6	6	6	6	6	6

Odtud lze určit tabulku pravděpodobností, tj. pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Uvedený příklad pro diskrétní náhodné veličiny ukazuje podstatu věci. Dále se obrátíme k složitějšímu a ne tak průhlednému případu spojitých náhodných veličin.

Tvrzení 9.2 (Transformace hustoty pravděpodobnosti pro skalární funkci)

Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ se sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a skalární funkci tohoto náhodného vektoru $Y = h(\mathbf{X})$. Distribuční funkci $F_Y(y)$ náhodné veličiny Y určíme takto

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int \int \dots \int_{h(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq y} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (51)$$

Integrace se provádí přes všechna x , pro která platí, že když je dosadíme do transformační funkce h , dostaneme číslo menší než y , pro které počítáme distribuční funkci.

Hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ získáme derivací distribuční funkce podle y .

Ověření: Plyne přímo z definice distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti.

PŘÍKLAD: Uvažujme hustotu pravděpodobnosti $f(x_1, x_2)$ dvourozměrné náhodné veličiny $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ a její funkci $Y = X_1 + X_2$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y . \diamond

Oblast integrace podle (51) je dána nerovnicí $x_1 + x_2 \leq y$, kde x_1 a x_2 jsou proměnné a y je konstanta. Jedná se tedy o polorovinu v rovině x_1, x_2 , ležící pod přímkou se směrnicovou rovnicí $x_2 = -x_1 + y$. Odtud plyne

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{y-x_2} f_X(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2.$$

Hustotu pravděpodobnosti získáme derivací podle y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y-x, x) dx$$

Uvažujme nyní ještě obdobu transformace hustoty pravděpodobnosti podle Tvzení 9.1, a to pro n -rozměrnou funkci n náhodných veličin.

Tvrzení 9.3 (Transformace hustoty pravděpodobnosti pro n funkcí n proměnných)

Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ se sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a n -rozměrnou, vzájemně jednoznačnou vektorovou funkcí tohoto náhodného vektoru $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) = [h_1(\mathbf{X}), h_2(\mathbf{X}), \dots, h_n(\mathbf{X})]$. Hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y) = f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ n -rozměrné náhodné veličiny Y určíme takto

$$f_Y(y) = f_X(h_1^{-1}(y), h_2^{-1}(y), \dots, h_n^{-1}(y)) |J|, \quad (52)$$

kde h_i^{-1} , $i = 1, 2, \dots, n$ značí funkce inverzní k funkcím h_i a $|J|$ je Jakobián inverzní transformační funkce h , tj.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad \text{nebo} \quad \frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Ověření: Vzorec plyne z (50) a věty o transformaci vícerozměrného integrálu.

PŘÍKLAD: Uvažujme dvourozměrné náhodné vektory $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ a $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2]$, pro které platí $Y_1 = X_1 + X_2$ a $Y_2 = X_2$. Určete hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ náhodného vektoru \mathbf{Y} . \diamond

Inverzní funkce jsou: $x_1 = h_1^{-1}(y) = y_1 - y_2$ a $x_2 = h_2^{-1}(y) = y_2$.

Jakobián je

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Hustota pravděpodobnosti $f_Y(y)$ je

$$f_Y(y) = f_X(h_1^{-1}(y), h_2^{-1}(y)) = f_X(y_1 - y_2, y_2).$$

Marginální hustota pravděpodobnosti $f_Y(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1 - y_2, y_2) dy_2$, což odpovídá výsledku příkladu k Tvzení 9.2.

10 Počítání s náhodnými veličinami a vektory

PŘÍKLAD 1: Je dána distribuční funkce náhodné veličiny X

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^3} \quad \text{pro } x > 1 \quad \text{jinde } 0.$$

Určete střední hodnotu, modus a medián tohoto rozdělení. ◇

Hustotu pravděpodobnosti dostaneme derivováním distribuční funkce

$$f(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x > 1, \quad \text{jinde } 0.$$

Střední hodnota je

$$E[X] = \int_1^\infty x \frac{3}{x^4} dx = \left[\frac{-3}{2x^2} \right]_1^\infty = \frac{3}{2}.$$

Modus je argument x , pro který nabývá hustota pravděpodobnosti maxima. Protože derivace $f'(x) = -12x^{-5}$ je $f(x)$ na intervalu $(1, \infty)$ klesající. Proto je maximum v levé hranici, a tedy

$$\hat{x} = 1.$$

Medián je bod \tilde{x} , pro který platí $F(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x) dx = 0.5$ Protože je dána přímo distribuční funkce, je

$$1 - \frac{1}{\tilde{x}^3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \sqrt[3]{2}.$$

PŘÍKLAD 2: Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{pro } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. ◇

Distribuční funkci určíme podle obecného vztahu $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Protože je ale hustota pravděpodobnosti po částech spojitá, musíme rovněž integrovat po částech, a to pro intervaly $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, \infty)$.

Na prvním intervalu $x \in (-\infty, 0)$ je $f(x) = 0$, a tedy bude také $F(x) = 0$.

Na druhém intervalu $x \in (0, 1)$ je $f(x) = x$ a tedy

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x t dt = 0 + \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x = \frac{1}{2} x^2$$

Na třetím intervalu $x \in (1, 2)$ je $f(x) = 2 - x$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x (2 - t) dt = 0 + \frac{1}{2} + \left[2t - \frac{1}{2} t^2 \right]_1^x = \\ &= \frac{1}{2} + 2x - \frac{1}{2} x^2 - 2 + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} (x - 2)^2 \end{aligned}$$

Na posledním intervalu $x \in (2, \infty)$ je opět $f(x) = 0$. Hodnota $F(x)$ na konci předchozího intervalu je $F(2) = 1$ a ta zůstane stejná pro celý interval.

Distribuční funkci tedy můžeme zapsat po částech

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ 0.5x^2 & \text{pro } x \in (0, 1) \\ 1 - 0.5(x-2)^2 & \text{pro } x \in (1, 2) \\ 1 & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

P O Z N Á M K A: *Pozor. Nezapomeňte, že v každém intervalu počítáme vždy integrál od $-\infty$, a tedy i přes všechny minulé intervaly (tj. intervaly vlevo). V diskrétním případě hovoříme o kumulativním součtu. Integrál je také "kumulativní".*

Střední hodnota:

Podle definice střední hodnoty a tvaru hustoty pravděpodobnosti je

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = 1,$$

což se dalo čekat (podle grafu hustoty).

Rozptyl:

$$\begin{aligned} D[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[x])^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E[X]^2 = \\ &= \int_0^1 x^3 dx + \int_0^2 x^2(2-x) dx - 1 = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^2 - 1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

P Ř Í K L A D 3: Při zaokrouhlování na jedno desetinné místo se dopouštíme chyby, rovnoměrně rozdělené na intervalu $(-0.05, 0.05)$. Jaká je pravděpodobnost, že se součet dvou takto zaokrouhlených čísel bude od hodnoty přesné lišit nejvýše o ± 0.02 ? \diamond

Chybu, vzniklou zaokrouhlením prvního čísla označíme X_1 a druhého X_2 . Obě mají rovnoměrné rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = 10$ pro $x \in (-0.05, 0.05)$ a 0 jinde. Obě tyto náhodné veličiny jsou nezávislé, a tedy sdružená hustota je

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = 100, \quad \text{pro } [x_1 x_2] \in (-0.05, 0.05) \times (-0.05, 0.05), \quad \text{jinde } 0$$

Chybu součtu označíme Y a je transformací $Y = X_1 + X_2$, $Y \in (-0.1, 0.1)$. Její distribuční funkce spočteme jako integrál z hustoty pravděpodobnosti přes oblast $x_1 + x_2 \leq y$, tj. $x_2 \leq -x_1 + y$

$$\begin{aligned} F(y) &= \int \int_{x_1+x_2 \leq y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \begin{cases} \int_{-0.05}^{0.05+y} \int_{-0.05}^{y-x_1} 100 dx_2 dx_1 = -150y^2 + 10y + 0.5 & \text{pro } y \leq 0 \\ 1 - \int_{y-0.05}^{0.05} \int_{y-x_1}^{0.05} 100 dx_2 dx_1 = -50y^2 + 10y + 0.5 & \text{pro } y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Distribuční funkce tedy je

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y \leq -0.1 \\ 50y^2 + 10y + 0.5 & \text{pro } y \in (-0.1, 0) \\ -50y^2 + 10y + 0.5 & \text{pro } y \in (0, 0.1) \\ 1 & \text{pro } y \geq 0.1 \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že součet dvou zaokrouhlených čísel se bude od přesné hodnoty lišit maximálně o ± 0.02 je roven pravděpodobnosti, že chyba v součtu (tj. hodnota náhodné veličiny Y) bude v intervalu $(-0.02, 0.02)$ a tu určíme pomocí rozdílu distribuční funkce

$$F(0.02) - F(-0.02) = -50 \cdot 0.02^2 + 10 \cdot 0.02 + 0.5 - (-150 \cdot 0.02^2 - 10 \cdot 0.02 + 0.5) = 0.36$$

P O Z N Á M K A: Při odvození distribuční funkce si oblast integrace nakreslete a rozdělte ji na dolní a horní polovinu. Integrací přes dolní polovinu obdržíte přímo distribuční funkci pro $y \leq 0$, integrací přes horní polovinu dostanete $P(Y > y) = 1 - F(y)$ a výsledek platí pro $y > 0$. S podmínkou $y \in (-0.1, 0.1)$ dostaneme výslednou distribuční funkci tak, jak je zapsána.

11 Limitní věty

11.1 Konvergence náhodné posloupnosti

Konvergence podle pravděpodobnosti

Protože posloupnosti náhodných veličin jsou náhodné, nelze pro ně použít běžnou definici konvergence. Proto se zavádí tzv. *konvergence podle pravděpodobnosti*, kde sledujeme nikoliv samotnou konvergenci členů posloupnosti, ale pravděpodobnost této konvergence.

Definice 11.1 (Konvergence podle pravděpodobnosti)

Pro posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ a konstantu $c \in R$ řekneme, že posloupnost konverguje k c podle pravděpodobnosti, tj. $X_n \xrightarrow{p} c$, jestliže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - c| \geq \epsilon) = 0, \quad \text{nebo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - c| \leq \epsilon) = 1, \quad \forall \epsilon \quad (53)$$

Komentář k definici

1. Definice říká, že jestliže posloupnost konverguje, pak pro dostatečně velká n je pravděpodobnost hodnot X_n vně ϵ -okolí bodu c blízká nule, nebo uvnitř tohoto okolí blízká jedné. Její význam je tedy názorný.

Konvergence v distribuci

Jedná se o další možnou definici konvergence náhodné posloupnosti, tentokrát nikoli ke konstantě ale k určité náhodné veličině.

Definice 11.2 (Konvergence v distribuci)

Uvažujme posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ s distribučními funkcemi $F(x_n)$ a náhodnou veličinou X s distribuční funkcí $F(x)$. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin X_n konverguje v distribuci k náhodné veličině X , jestliže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad (54)$$

ve všech bodech spojitosti funkce $F(x)$.

11.2 Čebyševova nerovnost

Pro každou náhodnou veličinu platí

$$P(|X - E[X]| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{D[X]}{\epsilon^2}.$$

Výraz $|X - E[X]|$ představuje vzdálenost realizací X od své střední hodnoty. Vzorec udává minimální pravděpodobnost, se kterou budou realizace X ležet v daném ϵ okolí své střední hodnoty.

11.3 Zákon velkých čísel

Uvažujme náhodnou posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

a) Pro tuto posloupnost náhodných veličin s alternativním rozdělením s parametrem π platí

$$X_n \leftrightarrow \pi$$

b) Pro posloupnost spojitých a nekorelovaných náhodných veličin se střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2 , podobně platí

$$X_n \leftrightarrow \mu.$$

Lze shrnout: Pro empirické charakteristiky počítané z dostatečného množství změřených hodnot platí, že se blíží k odpovídajícím charakteristikám souboru.

11.4 Centrální limitní věta

Uvažujeme posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin se střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2 . Pak posloupnost

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^n X_j - n\mu \right), \quad n \rightarrow \infty$$

konverguje v distribuci k rozdělení $N(0, 1)$ (standardní normální rozdělení).

Lze shrnout: Pro velký výběr z libovolně rozložené náhodné veličiny (spojité i diskrétní) mají součtové charakteristiky přibližně normální rozdělení, a to $\sum X_j$ se blíží k $N(n\mu, n\sigma^2)$ a $\sum X_j/n$ má přibližně rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$.

P O Z N Á M K A: *Tato věta má veliký praktický význam pro statistiku. Říká, že dostatečně velký počet naměřených hodnot zaručí, že další zpracování je možno provádět za předpokladu normality. S jiným, než normálním rozdělením, se totiž pracuje velmi těžko, nebo výpočty vůbec nelze provést.*

P Ř Í K L A D 1: Spojité rozdělení

Kolikrát je třeba změřit danou veličinu, jejíž přesná hodnota je μ , abychom mohli s pravděpodobností 0.96 tvrdit, že absolutní hodnota průměru měření se od správné hodnoty μ liší o méně než 2, je-li směrodatná odchylka měření rovna 4.

Ř E Š E N Í:

a) pomocí Čebyševovy nerovnosti: Průměr \bar{X} má střední hodnotu μ a rozptyl $\frac{\sigma^2}{n}$. Čebyševova nerovnost pro tento průměr je

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Pravděpodobnost 0.96, která je zadaná, je téměř stejná, jako pravděpodobnost na levé straně Čebyševovy nerovnosti, ale znaménko nerovnosti je obrácené. Musíme tedy vyjít z doplňku. Je

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) = 1 - P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) = 1 - 0.96 = 0.04.$$

Porovnáním pravé strany Čebyševovy nerovnosti s předchozím výsledkem dostaneme rovnici pro n

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0.04$$

a po dosazení

$$\frac{4^2}{n \cdot 2^2} = 0.04 \Rightarrow n = 100.$$

Pro požadovanou maximální chybu průměru měření od skutečné hodnoty je podle Čebyševovy nerovnosti třeba provést nejméně 100 měření.

b) pomocí centrální limitní věty: Předpokládáme-li, že provedených měření bude potřeba hodně (jak tomu naznačuje výpočet podle Čebyševovy nerovnosti), můžeme předpokládat, že bez ohledu na typ rozdělení samotných měření bude jejich průměr rozdělen normálně. Podle zadání úlohy má platit

$$P(|\bar{X} - \mu| < 2) = P(\bar{X} \in (\mu - 2; \mu + 2)) = 0.96.$$

Pro pravděpodobnost např. vpravo od tohoto intervalu tedy platí

$$P(\bar{X} \geq \mu + 2) = (1 - 0.96)/2 = 0.02.$$

Po normování argumentu pravděpodobnosti podle vzorce

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$$

dostaneme

$$P\left(Z \geq \frac{\mu + 2 - \mu}{\sigma} \sqrt{n}\right) = 0.02,$$

a tedy

$$\frac{2}{\sigma} \sqrt{n} = z_{0.02},$$

kde $z_{0.02} = 2.05$ je kritická hodnota normálního rozdělení pro pravděpodobnost 0.02.

Po dosazení za $\sigma = 4$ dostaneme

$$n \doteq 17.$$

Podle centrální limitní věty stačí pro požadovanou přesnost 17 měření.

Kontrola: pro platnost limitních vět požadujeme "velký počet měření". Běžně uváděná hodnota je 30 měření. Náš výsledek je 17 měření, musíme si být proto vědomi, že chyba výpočtu může být poněkud větší.

Vidíme, že Čebyševova nerovnost "si dává značnou rezervu". Platíme zde daň za to, že je velmi obecná – neopírá se o konkrétní rozdělení, ale platí pro libovolnou náhodnou veličinu.

PŘÍKLAD 2: Diskrétní rozdělení

Urna obsahuje 10 míčeků s čísly 0, 1, ..., 9. Postupně losujeme n míčeků tak, že vybraný míček opět vrátíme zpět. Kolik míčeků je třeba vytáhnout, aby relativní četnost vytažení míčku s číslem 6 ležela s pravděpodobností 0.95 v intervalu (0.09; 0.11)?

ŘEŠENÍ:

Princip řešení je obdobný jako v předchozím příkladě, jen rozdělení je jiné.

a) pomocí Čebyševovy nerovnosti: Relativní četnost vytažení míčku je rovna podílu $p = \frac{n^+}{n}$ (n^+ je počet míčků s číslem 6 vytažených v n pokusech). Tento podíl má střední hodnotu π a rozptyl $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$, kde $\pi = 0.1$ (deset míčků, každý má stejnou pravděpodobnost). Čebyševova nerovnost má pro tento případ tvar (rozptyl binomického rozdělení je $\pi(1-\pi)$)

$$P(|p - \pi| \geq \epsilon) \leq \frac{\pi(1-\pi)}{n\epsilon^2}.$$

Protože požadujeme, aby bylo $p \in (0.09; 0.11)$, tj $|p - \pi| < 0.01$, je $\epsilon = 0.01$. Levá strana Čebyševovy nerovnosti je doplňkem k zadané pravděpodobnosti 0.95, a tedy platí

$$\frac{\pi(1-\pi)}{n\epsilon^2} = 1 - 0.95, \quad \frac{0.1 \cdot 0.9}{n \cdot 0.01^2} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad n = 18\,000.$$

b) pomocí centrální limitní věty: Je $P(|p - \pi| < 0.01) = 0.95$ právě tehdy, když je $P(p \geq \pi + 0.01) = 0.025$. Argument pravděpodobnosti normujeme podle vzorce

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \sqrt{n}$$

a dostaneme

$$P\left(Z > 0.01 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\right) = 0.025.$$

Odtud

$$0.01 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} = z_{0.025},$$

kde $z_{0.025} = 1.96$ je kritická hodnota normálního rozdělení pro pravděpodobnost 0.025. Po dosazení dostaneme

$$\sqrt{n} = \frac{1.96 \sqrt{.1(1-.1)}}{0.01} = 58.8 \quad \Rightarrow \quad n \doteq 3457.$$

12 Rezerva

12.1 Kvantily a kritické hodnoty

Je dána normovaná normální náhodná veličina X . Jestliže víte, že $P(X > 1.645) = 0.05$ určete:

1. $P(X < 1.645) = ?$ [?=0.95]
2. $P(X > -1.645) = ?$ [?=0.95]
3. $P(X < -1.645) = ?$ [?=0.05]
4. $P(X < ?) = 0.05$ [?=1.645]
5. $P(X > ?) = -0.05$ [nesmysl]
6. $P(X < ?) = 0.95$ [?=1.645]
7. $P(|X| < 1.645) = ?$ [?=0.9]
8. $P(|X| > 1.645) = ?$ [?=0.1]

Je dána normální náhodná veličina se střední hodnotou 8 a rozptylem 16. Určete

1. $P(X > 10)$ [$= P(Z > \frac{10-8}{4}) = P(Z > 0.5) = 0.31$]
2. $P(X > 5)$ [$= P(Z > \frac{5-8}{4}) = P(Z > -3/4) = 1 - P(Z > 3/4) = 0.77$]

12.2 Příklady k rozdělení NV

1. V dodávce 1000 výrobků je 50 vadných.
 - a) Jaká je pravděpodobnost, že ve výběru 80 výrobků bude 5 vadných?
 - b) Jaký bude průměrný počet vadných výrobků v opakovaném výběru 80 ks?
 - c) Provedeme 100 výběrů po 80 kusech. Jaký je očekávaný počet výběrů s pěti vadnými výrobky?

Ř E Š E N Í:

a) Úplně přesně: $P = C_5(50)C_{75}(950)/C_{80}(1000)$ - nejde počítat. Aproximace binomickým rozdělením s $n = 80$ a $\pi = 50/1000 = 0.05$. Hledaná pravděpodobnost je $P(5) = \binom{80}{5}0.05^5 0.95^{75} = 0.1603$.

Další aproximace Poissonovým rozdělením (n velké, π malé) s $\lambda = n\pi = 4$. Bude $f(5) = e^{-4} \frac{4^5}{5!} = 0.1563$.

b) Bude to střední (očekávaná) hodnota $E[K] = n\pi = \lambda = 4$.

c) Podle statistické definice je pravděpodobnost rovna počtu úspěšných pokusů dělenému celkovým počtem pokusů, tedy $P(5) = \frac{N^+}{N} \Rightarrow 0.16 = \frac{N^+}{100} \Rightarrow N^+ \doteq 16$

2. Pravděpodobnost výroby vadného výrobku je 0.01%. Nový pracovník vyrobil 5000 výrobků a z nich byly 3 vadné. Je tento počet normální, nebo lze předpokládat, že je způsoben nezkušeností pracovníka?

Ř E Š E N Í:

Náhodná veličina "počet vadných výrobků v sérii 5000" má Poissonovo rozdělení (n velké, π malé) s $\lambda = 5000 \cdot 0.0001 = 0.5$. Potom pravděpodobnost, že za běžných okolností (tj. s běžnou pravděpodobností vyrobení vadného výrobku $\pi = 0.01$) je pravděpodobnost tří a více vadných výrobků rovna $P(K > 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - e^{-0.5}(1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2}) = 0.014$. Tj. pravděpodobnost, že za normálních okolností budou v sérii 5000 výrobků 3 nebo více vadných je 0.014; jinak řečeno, jen 1.4% pracovníků by mělo tolik vadných výrobků. To ukazuje na nezkušenost nového pracovníka.

3. Měřicí přístroj je zatížen jednak systematickou chybou 0.5, jednak náhodnou chybou se směrodatnou odchylkou 0.3.

- a) S jakou pravděpodobností bude změřena hodnota s odchylkou v intervalu (0.4; 0.6)?
b) V jakých mezích lze očekávat odchylky od správné hodnoty s pravděpodobností 0.95?

Ř E Š E N Í:

a) Normální rozdělení. Předpokládáme, že máme k dispozici pouze tabulky pravděpodobností, kde jsou uvedeny jen pravděpodobnosti normovaného rozdělení. Budeme proto normovat. (Pozn.: např v Excelu lze řešit bez normování.)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad \Rightarrow \quad z_d = \frac{0.4 - 0.5}{0.3} = -0.33, \quad z_h = \frac{0.6 - 0.5}{0.3} = 0.33.$$

Požadovaná pravděpodobnost je $P(X \in (0.4; 0.6)) = P(Z \in (-0.33; 0.33)) = 1 - 2P(Z < -0.33) = 1 - 2 \cdot 0.37 \doteq 0.26$.

b) Je-li pravděpodobnost intervalu 0.95, je pravděpodobnost vpravo i vlevo pravděpodobnost 0.025. Hledáme kritickou hodnotu $z_{0.025}$ (kvantil $\zeta_{0.025}$), tj hodnotu, pro kterou platí

$$P(Z > z_{0.025}) = 0.025, \quad \text{nebo} \quad P(Z < \zeta_{0.025}) = 0.025$$

Z tabulek: $z_{0.025} = 1.96$ nebo $\zeta_{0.025} = -1.96$. Po odnormování (přechodu k původní náhodné veličině X) dostaneme

$$X = \mu + \sigma \cdot Z \quad \Rightarrow \quad x_d = 0.5 - 1.96 \cdot 0.3 = -0.088, \quad x_h = 0.5 + 1.96 \cdot 0.3 = 1.088.$$

Chyba bude s pravděpodobností 0.95 ležet v intervalu (-0.088; 1.088).

Poznámka: Tento druh výpočtů je velmi důležitý. Bude základem pro řadu úloh ve statistice (intervaly spolehlivosti, testy hypotéz).

4. Průměrná doba čekání na zákazníka je 50 s. Doba čekání se řídí exponenciálním rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude obsloužen v době kratší než 30 s?

ŘEŠENÍ:

Průměrná doba čekání je střední hodnota, tedy $\delta = 50$.

$$P(X < 30) = \int_0^{30} f(\xi) d\xi = F(30) = 1 - e^{-\frac{1}{50}30} = 0.45.$$

12.3 Přepočítání sdružené hp na marginální a podmíněnou

Na dvou příkladech ukážeme pro diskrétní a spojitě (normální) rozdělení základní přepočítání hustot pravděpodobnosti (hp): "marginální" krát "podmíněná" rovná se "sdružená" a obrácený rozklad na "podmíněnou" a "marginální". Tento postup odpovídá jednomu použití Bayesova vzorce a je základem pro odhadování parametrů matematických modelů. Označíme-li θ parametr modelu a y sledovanou náhodnou veličinu (data), lze zmíněný přepočítání zapsat takto

$$f(\theta)f(y|\theta) = f(y, \theta) = f(\theta|y)f(y).$$

V interpretaci teorie rozhodování mají jednotlivé hp následující význam:

1. $f(\theta)$ je apriorní hp, která popisuje parametr bez znalosti dat y . Konstruuje se na základě znalosti procesu, než začneme měřit data.
2. $f(y|\theta)$ je model. Dává pravděpodobnostní popis výstupu y , jestliže známe parametr modelu θ .
3. $f(\theta|y)$ je aposteriorní hp. Dává popis parametru, do kterého je již zahrnuta informace ze změřeného y .
4. $f(y)$ je predikce. Určuje pravděpodobnosti různých hodnot y a to v případě, že neznáme hodnotu parametru θ .

PŘÍKLAD 1: Nejprve budeme uvažovat diskrétní případ, tj. situaci, kdy sledovaná náhodná veličina y může nabývat jen konečného (spočetného) počtu hodnot; v našem případě dvě. Budeme sledovat T křižovatku, do které vjíždí auta a odbočují buď doleva nebo doprava. Náhodnou veličinu y ztotožníme se způsobem odbočení - doleva: $y = 0$, doprava: $y = 1$.

Model má popisovat situaci, vyjádřenou slovně takto: pravděpodobnost, že $y = 1$ je θ a $y = 0$ je doplněk $1 - \theta$. Tento model je možno zapsat následujícím způsobem

$$f(y|\theta) = \theta^{\delta(y,1)}(1 - \theta)^{\delta(y,0)},$$

kde $\delta(y, i)$ je Kroneckerova funkce, tj. $\delta(y, i) = 1$ pro $y = i$, jinak je nula. (Tento model má tvar alternativního rozdělení, protože $\delta(y, 0) = 1 - y$ a $\delta(y, 1) = y$.)

Apriorní hp $f(\theta)$ volíme záměrně v takovém tvaru, aby po vynásobení hp modelu její tvar zůstal zachován (tzv. reproduktivní tvar). Bude tedy

$$f(\theta) \propto \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0},$$

a normujeme tak, aby integrál přes θ od nuly do jedné byl jedna

$$\alpha \int_0^1 \theta^{n_1} (1 - \theta)^{n_0} d\theta = \alpha \mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1/\mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1),$$

kde

$$\mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1) = \frac{\Gamma(n_1 + 1)\Gamma(n_0 + 1)}{\Gamma(n_0 + n_1 + 2)} = \frac{n_0! n_1!}{(n_0 + n_1 + 1)!},$$

kde poslední výraz platí pro n_1, n_0 celé.

Sdružená hp bude

$$\begin{aligned} f(y, \theta) &= f(y|\theta)f(\theta) = \theta^{\delta(y,1)}(1 - \theta)^{\delta(y,0)} \frac{1}{\mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1)} \theta^{n_1} (1 - \theta)^{n_0} = \\ &= \frac{1}{\mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1)} \theta^{n_1 + \delta(y,1)} (1 - \theta)^{n_0 + \delta(y,0)} \end{aligned}$$

Marginální hp pro y dostaneme integrováním přes θ

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^1 \frac{1}{\mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1)} \theta^{n_1 + \delta(y,1)} (1 - \theta)^{n_0 + \delta(y,0)} d\theta = \\ &= \frac{\mathcal{B}(n_1 + \delta(y,1) + 1, n_0 + \delta(y,0) + 1)}{\mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1)} = \frac{n_y + 1}{n_0 + n_1 + 2} \end{aligned}$$

Aposteriorní hp pro θ dostaneme dělení sdružené a marginální (podle definice)

$$\begin{aligned} f(\theta|y) &= \frac{f(y, \theta)}{f(y)} = \\ &= \frac{n_0 + n_1 + 2}{n_y + 1} \frac{1}{\mathcal{B}(n_1 + 1, n_0 + 1)} \theta^{n_1 + \delta(y,1)} (1 - \theta)^{n_0 + \delta(y,0)} = \\ &= \frac{n_0 + n_1 + 2}{n_y + 1} \frac{(n_0 + n_1 + 1)!}{n_0! n_1!} \theta^{n_1 + \delta(y,1)} (1 - \theta)^{n_0 + \delta(y,0)} = \\ &= \frac{(n_0 + n_1 + 2)!}{(n_y + 1)! n_{1-y}!} \theta^{n_1 + \delta(y,1)} (1 - \theta)^{n_0 + \delta(y,0)} \end{aligned}$$

Protože měření dat y se může v čase $t = 1, 2, \dots$ opakovat, je výhodné zavést statistiky

$$\begin{aligned} N_{1;t} &= N_{1;t-1} + \delta(y, 1) \\ N_{0;t} &= N_{0;t-1} + \delta(y, 0) \end{aligned}$$

s počátečními hodnotami $N_{1;0} = n_1 - 1$ a $N_{0;0} = n_0 - 1$.

Potom přepočítání aposteriorní hp v čase $t \Rightarrow t + 1$ bude

$$\frac{1}{\mathcal{B}(N_{1,t}, N_{0,t})} \theta^{N_{1,t}-1} (1 - \theta)^{N_{0,t}-1} \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{B}(N_{1,t+1}, N_{0,t+1})} \theta^{N_{1,t+1}-1} (1 - \theta)^{N_{0,t+1}-1}$$

Odhad parametru θ v čase t je

$$\hat{\theta}_t = \frac{N_{1,t+1}}{N_{0,t+1} + N_{1,t+1}}$$

a získáme jej jako střední hodnotu z aposteriorní hp (za úkol).

PŘÍKLAD 2: Provedeme podobný přepočít jako v minulém případě, ale pro spojité (normální) rozdělení.

Model bude popisovat situaci, kdy sledovaná veličina y má mít stále stejnou hodnotu θ a její měření se liší jen o určitou poruchu (šum). Poruchu označíme e a její rozdělení předpokládáme ve tvaru normované normální hp

$$f(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}e^2\right\}.$$

Transformací $y = \theta + e$ získáme hp modelu

$$f(y|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - \theta)^2\right\}.$$

Všimněme si, že se jedná o podmíněnou hp. Model lze použít pro vyjádření hodnoty y jen za podmínky, že známe hodnotu parametru θ .

Apriorní hp pro θ vyjádříme také jako normální, se střední hodnotou θ_0 - předběžně nejpravděpodobnější hodnota parametru, a opět (pro jednoduchost) s jednotkovým rozptylem

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2\right\}$$

Sdružená hp bude

$$\begin{aligned} f(y, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - \theta)^2\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(y - \theta)^2 + (\theta - \theta_0)^2]\right\} \end{aligned}$$

Podmíněnou v θ a marginální v y dostaneme doplněním výrazu v hranaté závorce exponentu na čtverec v proměnné θ takto

$$\begin{aligned} (y - \theta)^2 + (\theta - \theta_0)^2 &= y^2 - 2y\theta + \theta^2 + \theta^2 - 2\theta_0\theta + \theta_0^2 = 2\theta - 2\theta(y + \theta_0) + y^2 + \theta_0^2 = \\ &= 2 \left[\theta^2 - 2\theta \frac{y + \theta_0}{2} + \left(\frac{y + \theta_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{y + \theta_0}{2}\right)^2 \right] + y^2 + \theta_0^2 = \\ &= 2 \left(\theta - \frac{y + \theta_0}{2} \right)^2 + y^2 + \theta_0^2 - \frac{y^2 + 2y\theta_0 + \theta_0^2}{2} = \frac{1}{0.5} \left(\theta - \frac{y + \theta_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}(y - \theta_0)^2 \end{aligned}$$

Výraz dosadíme zpět so sdružené hp a převedeme na součin exponenciál. Dostaneme tak součin podmíněné a marginální hp

$$f(\theta|y)f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.5}} \exp\left\{-\frac{1}{2 \times 0.5} \left(\theta - \frac{y + \theta_0}{2}\right)^2\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} \exp\left\{-\frac{1}{2 \times 2}(y - \theta_0)^2\right\}.$$

Z výsledku vidíme:

1. U posteriorní hp se

- zmenší rozptyl - lepší odhad,
- přepočte odhad - vezme se v úvahu informace z naměřeného y .

2. Marginální hp představuje predikci - model y , když neznáme hodnotu parametru θ . Předpokládáme jen jeho výchozí popis pomocí apriorní hp (tj. někde kolem θ_0). Vzhledem k této neurčitosti je i rozptyl vyšší.