

2 5.1.2005

3 1. Nech m je mnozina vsetkych realnych ohranicenych postupnosti s metrikou
 4 $\varrho(x, y) = \sup_n \{|x_n - y_n|\}$. Nech $f: m \rightarrow \mathbb{R}$ je zadana predpisom $f(x) =$
 5 $\sup_n \{x_n\}$. Je zobrazenie f spojite?
 Ak $\varrho(x, y) = \sup|x_n - y_n| < \delta$, znamena to

$$\begin{aligned} y_n - \delta &\leq x_n \leq y_n + \delta \\ \sup y_n - \delta &\leq \sup x_n \leq \sup y_n + \delta \\ |\sup x_n - \sup y_n| &\leq \delta. \end{aligned}$$

K $\varepsilon > 0$ zvolime $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ a mame:

$$|f(x) - f(y)| = |\sup x_n - \sup y_n| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

6 2. Na \mathbb{R} su dane dve metriky. $\varrho(x, y) = |x - y|$, $\sigma(x; y) = 1$ (ak $x \neq$
 7 y); $\sigma(x; y) = 0$ (ak $x = y$). Uvedte priklad zobrazenia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taky, aby
 8 $f: (\mathbb{R}; \sigma) \rightarrow (\mathbb{R}; \varrho)$ bolo spojite a $f: (\mathbb{R}; \varrho) \rightarrow (\mathbb{R}; \sigma)$ nebolo spojite.
 9 Metrika ϱ je obvykla metrika na \mathbb{R} , cize spojitost/nespojitost pri tejto metrike
 10 je uplne obycajna spojitost aku pozname z 1.rocnika.¹

11 **Lema 1.** *Lubovolne zobrazenie $f: (\mathbb{R}; \sigma) \rightarrow (\mathbb{R}; \varrho)$ je spojite.*

12 *Dôkaz.* Ku kazdemu $\varepsilon > 0$ mozeme zvolit $\delta = \frac{1}{2}$. Plati totiz
 13 $\sigma(x, y) < \frac{1}{2} \Rightarrow x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ □

Ked vieme, ze kazde zobrazenie je spojite vzhľadom na metriku σ , staci najst
 uplne lubovolne nespojite zobrazenie pri obvyklej metrike na \mathbb{R} . Naprieklad

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

14 Poznamka: Dokaz lemy 1 by fungoval presne rovnako aj keby sme mali takto
 15 definovanu metriku na lub. mnozine a zobrazenie by slo do hocijakeho mp (nikde
 16 sme nevyuzili, ze to je prave (\mathbb{R}, ϱ)).

17 3.

18 Nech (X, ϱ) je ohraniceny metricky priestor, (Y, σ) je neohraničeny metricky
 19 priestor. Moze byt
 20 a. (X, ϱ) izomorfny s (Y, σ) ?
 21 b. (X, ϱ) homeomorfny s (Y, σ) ?
 22 Zdovodnite!

¹K tejto vete som dostał komentár, že by som si za nu zasluzil byt zabity. Zrejme som mal napisat z gymnazia alebo zo ZS.

²³ a) Nie. Izomorfizmus (izometria) zachovava vzdialenosť a teda aj ohraničenosť.

²⁵ b) Ano. Napriklad \mathbb{R} je izomorfny s $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (Spojita bijekcia $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$ je homeomorfizmus (aj inverzne je spojite).)

²⁷ 18.1.2005

²⁸ 1. Najprv spisem nejake veci, ktore budeme potrebovat.
Dosledok trojuholnikovej nerovnosti:

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad (1)$$

²⁹ Na <http://planetmath.org/encyclopedia/TriangleInequality.html> je to
³⁰ aj s dokazom.

³¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_inequality bez dokazu
Spojite zobrazenie: $f: (X, d) \rightarrow (Y, \varrho)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \ d(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad (2)$$

Ak $Y = \mathbb{R}$ (nas pripad):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \ d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (3)$$

³² Este si vsimnime:

³³ Ak dokazeme, ze $\varrho(f(x), f(y)) \leq C.d(x, y)$ (pre vsetky x, y), tak z toho vyplýva spojitosť.

³⁵ Dokaz - ak mame dokazanu hornu nerovnosť, tak potom pre $\varepsilon > 0$ staci zvolit $\delta = \frac{\varepsilon}{C+1}$ a:

³⁷ $\varrho(f(x), f(y)) \leq C.d(x, y) \leq C.\delta = \frac{C}{C+1}\varepsilon < \varepsilon$ pre ubovon x, y s $d(x, y) < \delta$

³⁸ V nasom pripade:

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|d(x, a) - d(y, a)\right| \stackrel{(1)}{\leq} d(x, y)$$

⁴⁰ 2. Nech $(X; \varrho)$ je kompaktny metricky priestor. Nech $A, B \subseteq X$ su neprazdne
⁴¹ uzavrete v X , pricom su disjunktne. Dokazte, ze $\varrho(A; B) = \inf\{\varrho(x; y) : x \in A, y \in B\} > 0$.

⁴³ Ak by platilo $\varrho(A; B) = \inf\{\varrho(x; y) : x \in A, y \in B\} = 0$, tak ku kazdemu n
⁴⁴ existuju $x_n \in A$ a $y_n \in B$ tak, e $\varrho(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Cize plati $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$.

⁴⁵ X je kompaktny \Rightarrow z (x_n) aj z (y_n) viem vybrat konvergentnu podpostupnost.

⁴⁷ Cize existuju konvergentne postupnosti (x_n) a (y_n) tak, e plati $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$. Oznacme $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ a $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Pretoze $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, musi platiť
⁴⁸ $x = y$. ² Sucasne mame $x \in A$ (je to limita postupnosti prvkov A a A je
⁴⁹ uzavret) a $x = y \in B$ (z rovnakych dovodov).

⁵¹ Dostali sme $x \in A \cap B$, $A \cap B \neq \emptyset$, spor.

² $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$, staci urobit limitu $n \rightarrow \infty$. Prava strana ide k 0, cize $d(x, y) = 0$. $(x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_n, x) = 0)$ - to je presne definicia spojitosťi v MP.)

52 Pozn: Asi by sa to dalo kadejako inak dokazovať, ale tento sposob sa mi
53 zdal najjednoduchší (tusim ste mali kompakt dokonca definovaný cez podpos-
54 stupnosti.)

55 3. Uvedte príklad uplného metrického priestoru, v ktorom existuje ohra-
56 cena postupnosť taká, že z nej nie je možné vybrať ciastocnú konvergentnú.

57 Dobre by bol nejaký príklad, o ktorom môže byť dokazané, že je uplný. Napríklad
58 ℓ_2 , $C(\langle 0, 1 \rangle)$, ohrazené postupnosti s metrikou $\sup\{x_n - y_n\}$.

59 Skusme $m =$ ohrazené posupnosti; $d(x, y) = \sup\{x_n - y_n\}$.

60 Ze je uplný uverime (alebo bolo na prednáške)?

Definujme

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = k; \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

61 (Cize definovali sme postupnosť $x^{(n)}$ prvkov z X .)

62 Ak postupnosť konverguje v m , tak musí konvergoval po suradničach.³ Cize
63 vybraná postupnosť može konvergoval jedine k postupnosti $z = (z_n) = 0, 0, \dots$
64 Ale $d(z, x^{(n)}) = 1$ (pre vsetky n), co je spor.

65 Iny príklad: Metrika na \mathbb{R} , $\sigma(x; y) = 1$ (ak $x \neq y$); $\sigma(x; y) = 0$ (ak $x = y$).⁴

66 Ocividne v (\mathbb{R}, σ) konverguju iba stacionárne postupnosti. Cize z ohrazenej
67 postupnosti $x_n = n$ (kazda post. je v nasej metrike ohrazena) sa neda vybrať
68 konvergentná.

69 Pytame sa teda, ci (\mathbb{R}, σ) je uplný. Postupnosť (x_n) je cauchyovská ak
70 $\sigma(x_n, x_m) \rightarrow 0$, co ale znamena, ze x_n je stacionarna.

71 (Podrobne: Ku $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existuje $p \in \mathbb{N}$ take, že $m, n > p \Rightarrow \sigma(x_n, x_m) < \varepsilon = \frac{1}{2}$
72 $\Rightarrow x_n = x_m$.)

73 Stacionrná \Rightarrow konvergentná. Ukažali sme, že kazda cauchyovská postupnosť
74 je konvergentná, preto je priestor uplný.

75 4. Je \mathbb{R}^n s euklidovskou metrikou separabilný? Zdovodnite.

76 Hustá spocitatelna podmnožina je \mathbb{Q}^n . Nerobili sme to uz, ked sme sa ucili
77 na test?

78 Salat, príklad 3.1.1. - nieco by malo byť tu, ale nemam tu knizku pri sebe,
79 nemozem skontrolovať.

80 5. Na kompaktnom priestore reálna funkcia dosahuje maximum a minimum
81 - to by mala byť veta z prednášky.

82 Je to dokazane v http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/personal/vencko/MA1/ma1_6.pdf

83 Tu som najprv skusal iný dokaz:

84 Ak vieme, že v \mathbb{R} je kazda kompaktna uzavretá a ohrazena tak to z toho
85 uz vytlieme.

³Bolo na prednáške alebo cviku?

⁴Fungovalo by to s hocjakou nekonečnou množinou.

87 Dokaz tohto ↑ je v http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/personal/vencko/MA1/ma1_5.pdf, s.65, veta 3.

89 Ak $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je spojita, X je kompakt, tak $f[\mathbb{R}]$ je kompaktna podmnozina \mathbb{R} (obraz kompaktu je kmpakt).

90 To znamena, ze $f[\mathbb{R}]$ je ohranicena \Rightarrow supremum a infimum je konecne.

91 $f[\mathbb{R}]$ je uzavreta \Rightarrow maximum aj minimum do nej musia patrit. (Existuje postupnosť, ktora konverguje k supremu.)

94 25.1.2005

95 1. Nech l_1 je mnozina vsetkych realnych postupnosti $x = (x_n)$ takych, ze
96 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$. Ak $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ su z l_1 , tak volime $d_1(x, y) =$
97 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$.

98 a. d_1 je metrika na l_1

99 b. l_1 je podmnozinou l_2 (l_2 - mnozina vsetkych postupnosti realnych cisel;
100 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$)

101 Dokazte!

102 a: $\sum |x_n - y_n| + \sum |y_n - z_n| = \sum (|x_n - y_n| + |y_n - z_n|) \leq \sum |x_n - z_n|$

103 b: Ak $\sum |x_n| < +\infty$, tak $x_n \rightarrow 0$. Preto od isteho N_0 pocnuc plati $|x_n| < 1$,
104 $x_n^2 < |x_n|$. Z tejto nerovnosti a z konvergencie radu $\sum |x_n|$ vyplýva aj konver-
105 gencia $\sum x_n^2$.⁵

106 Poznamka: Postupnosť $\frac{1}{n}$ patri do $l_2 \setminus l_1$, inkluzia je vlastna.

107 2. Nech na X su definovane dve metriky d_1 a d_2 . Nech existuju $a > 0$, $b > 0$
108 tak, ze pre vsetky $x, y \in X$ je $ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y)$. Dokazte, ze ak
109 $x_n \rightarrow x$ podla $d_1 \Leftrightarrow x_n \rightarrow x$ podla d_2 .

110 Poznamka: Taketo metriky sa volaju ekvivalentne. 2 metriky su ekvivalentne
111 \Leftrightarrow definuju rovnaku topologiu \Leftrightarrow definuju rovnaku konvergenciu. Skus google:
112 equivalent + metric, mozno to najdes; ja som to radsej spisal.

113 Nech $x_n \rightarrow x$ v d_1 . T.j. $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$.

114 Potom plati $0 \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y) \rightarrow 0$, cize aj $d_2(x, y) \rightarrow 0$.

115 Opacna implikacia - podobny dokaz. ($d(x, y) \leq \frac{1}{a}d_2(x, y)$)

116 3. Kazda fundamentalna postupnosť prvkov metrickeho priestoru je ohran-
117 icena. Dokazte!

118 <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~john/analysis/Lectures/L10.html>

119 Ak (x_n) je fundamentalna, znamena to, ze existuje n_0 take, ze

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

cize specialne mame

$$m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

120 Potom pre $m \geq n_0$ mame $d(x_m, 0) \leq d(x_{n_0}, 0) + d(x_m, x_{n_0})$, co je konecne cislo,
121 oznamce ho K .

⁵Sa mi mari, ze standardny dokaz bol trochu iny, ale mozno som si to s niecim poplietol.

¹²² Tym sme ohranicili vsetky clenky postupnosti okrem konecneho poctu. $M :=$
¹²³ $\max\{d(x_k, 0); k := 1, \dots, n_0\} + M$ je potom ohranicenie pre vsetky clenky.

¹²⁴ Este raz, kedze vy mate inu definiciu ohranicenej ako som pouzil tam hore.
Ak (x_n) je fundamentalna, znamena to, ze existuje n_0 take, ze

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

cize specialne mame

$$m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

¹²⁵ Oznacme $M := \max\{d(x_k, x_{n_0}); k := 1, \dots, n_0\}$. (Je to konecna mnozina -
¹²⁶ maximum existuje).

Cize pre kazde $m \in \mathbb{N}$ mame bud $d(x_m, x_{n_0}) \leq M$ (ak $m \leq n_0$) alebo
 $d(x_m, x_{n_0}) \leq \varepsilon$ (ak $m > n_0$). Teda pre kazde $m \in \mathbb{N}$ plati

$$d(x_m, x_{n_0}) \leq M + \varepsilon.$$

Potom

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq 2(M + \varepsilon), \\ \sup\{d(x_m, x_n); m, n \in \mathbb{N}\} &\leq 2(M + \varepsilon), \end{aligned}$$

¹²⁷ postupnost je ohranicena.

¹²⁸ 4. Nech A_1, \dots, A_n su kompaktne podmnoziny metrickeho priestoru X .
¹²⁹ Dokazte, ze aj $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ je kompaktna.

¹³⁰ Ak mame lubovolne otvorene pokrytie \mathcal{U} mnoziny A , tak je to sucasne
¹³¹ pokrytie kazdej z mnozin A_i . Cize pre kazde i existuje konecne podpokrytie
¹³² \mathcal{U}_i mnoziny A_i . Potom $\mathcal{U}' = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ je pokrytie mnoziny A a je to konecna
¹³³ mnozina (zjednotenie konecne vela konecnych).

¹³⁴ 5. Dokazte, ze metricky priestor s trivialnou metrikou je uplny. ($d(x,y)=1$
¹³⁵ pre $x \neq y$; $d(x,y)=0$ ak $x=y$).

¹³⁶ Vid ten jednoduchsi kontrapriklad v priklade 3 z 18.1.2005.

¹³⁷ Na dokaz, ze \mathbb{R} je uplny si sa pytala.

¹³⁸ http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/personal/vencko/MA1/ma1_5.pdf s.60,
¹³⁹ veta 5 - z ohranicenej sa da vybrat konvergentna

¹⁴⁰ s. 67: R je uplny

¹⁴¹ Lepsie ako Vencko by som to nespisal.

¹⁴² Schema dokazu je: fundamentalna \Rightarrow ohranicena \Rightarrow da sa vybrat konver-
¹⁴³ gentna. Potom ukazeme ze cela postupnost ma tu istu limitu ako ta vybrata
¹⁴⁴ konvergentna. (Pouzijeme definiciu fundamentalnej.)