Vybrané partie k matematickej analýzy 2

(X,ϱ), (Y,σ) - MP, $f: X\to Y$

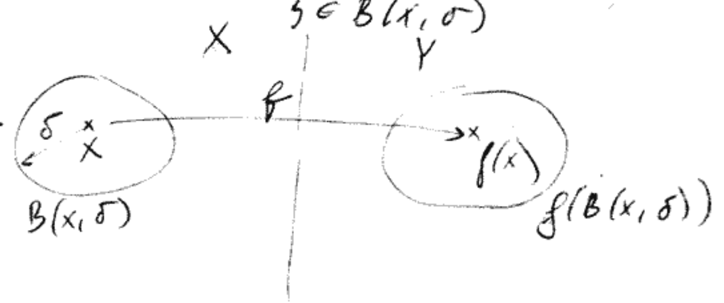
Def. okolie bodu: $B(x,\delta)=\{y\in X: \varrho(y,x)<\delta\}\subset X$

$f(B(x,\delta))=\{z\in Y: \exists\, y\in B(x,\delta): z=f(y)\}\subset Y$

diameter:

diam $f(B(x,\delta)) = d_\delta$

$= \sup\{\sigma(x,y)\}$, $x,y\in f(B(x,\delta))$



Def. oscilácia funkcie f v bode x: $\omega_f(x)=\inf\{d_\delta\}=\lim_{\delta\to 0^+} d_\delta$

Veta: Nech $f:X\to Y$. Potom $x\in X$ je bodom spojitosti $f \Leftrightarrow \omega_f(x)=0$.

Lema: Pre každé $\varepsilon>0$ je množina $A_\varepsilon=\{x\in X: \omega_f(x)\ge\varepsilon\}$ uzavretá.

Lema: Pre ľubovoľné $f:X\to Y$ platí: $D_f=\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{x\in X: \omega_f(x)\ge \frac{1}{n}\}}_{A_{\frac{1}{n}}}$.

Veta: Nech $f:X\to Y$. Potom množina C_f je množina typu G_δ a obsahuje všetky izolované body X.

! strana 5 (príklad)

Def. $A\subset X$ opakovanie (minulý semester)

A - 1. Bairovej kategórie: ak $A=\bigcup_1^\infty F_n$: F_n - riedke v X ($\mathbb{Q}$ - 1. Bairovej kat.)

A - 2. Bairovej kategórie: ak nie je 1. Bairovej kategórie

A - typu F_σ: ak $A=\bigcup_1^\infty F_n$: F_n - uzavreté (body nespojitosti D_f)

A - typu G_δ: ak $A=\bigcap_1^\infty G_n$: G_n - otvorené (body spojitosti C_f)

Veta: A - typu F_σ, A - hraničná $\to$ A - 1. Bairovej kategórie

Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie:

$|g_n(x)|\le c_n \wedge \sum_1^\infty c_n<+\infty \to \sum_1^\infty g_n(x)$ konverguje.

Veta: Nech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - monotónna. Potom jej D_f je spočítateľná množina.

Def: variácia funkcie f na $\langle a,b\rangle$:

$$\operatorname{Var}_a^b f=\sup_{P\in\mathcal{P}} V(P,f), \text{ kde } V(P,f)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|, \quad a=x_0<\dots<x_n=b$$

$BV(a,b)=\{f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}: \operatorname{Var}_a^b f<+\infty\}$

Veta: Nech $f\in BV(a,b)$. Potom f je rozdielom 2 neklesajúcich funkcií.

Veta: Nech $M=\{f \mid f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}: f\text{ - monotónna}\}$. Potom $[M]=BV(a,b)$.

Def: dĺžka krivky:

$$L(f)=\sup_{P\in\mathcal{P}} L(P,f), \text{ kde } L(P,f)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}, \quad a=x_0<\dots<x_n=b$$

Veta: Nech $f: \langle a, b\rangle \to R$. Potom dĺžka grafu funkcie f je konečná $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Var}_a^b f < +\infty$.

Def. $M \subset R$, I - otvorený interval. Množina M má Lebesgueovu mieru 0 ($|M| = 0$), ak pre $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ postupnosť intervalov $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ (kde $I_n = (a_n, b_n)$, $|I_n| = |b_n - a_n|$) tak, že $M \subset \bigcup_1^{\infty} I_n$ a $\sum_1^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.

! pre ľubovoľnú postupnosť $(a_n)_1^{\infty}$ nemusí existovať limita, ale vždy existujú limes superior, limes inferior.

$$D^+ f(x) = \limsup_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$D_+ f(x) = \liminf_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$D^- f(x) = \limsup_{y \to x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$D_- f(x) = \liminf_{y \to x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

zvolíme $y_n : (y_n) \to x^+$ ($\forall y_{n+1} < y_n$)

$$\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \to L_y(x)$$

$$D^+ f(x) = \sup_y L_y(x) = \text{limes superior}$$

$$D_+ f(x) = \inf_y L_y(x) = \text{limes inferior}$$

D - smernice grafu funkcie (grafická interpretácia)

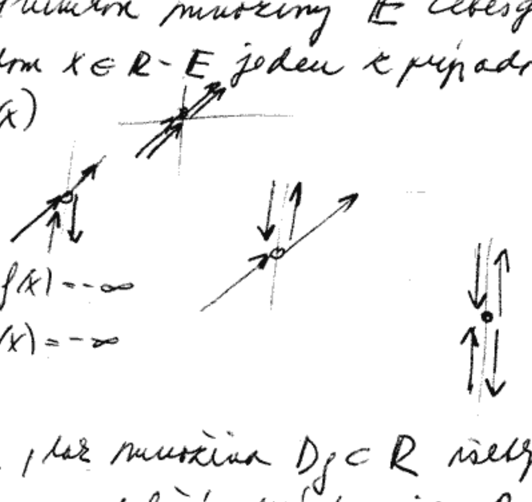
Veta DYS: Nech $f: R \to R$. Potom s výnimkou množiny E Lebesgueovej miery 0, nastane v každom $x \in R - E$ jeden z prípadov:

a) $D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x)$

b) $D^+ f(x) = D_- f(x)$
$D_+ f(x) = -\infty$, $D^- f(x) = +\infty$

c) $D_+ f(x) = D^- f(x)$, $D^+ f(x) = +\infty$, $D_- f(x) = -\infty$

d) $D^+ f(x) = D^- f(x) = +\infty$, $D_+ f(x) = D_- f(x) = -\infty$



Veta (Lebesgue): Ak $f: R \to R$ je monotónna, tak množina $D_f \subset R$ všetkých bodov, v ktorých f nie je diferencovateľná, má L. mieru 0.

Veta: Nech $E \subset R$ má L. mieru 0. Potom existuje funkcia $f: R \to R$ taká, že nie je v žiadnom $x \in E$ diferencovateľná.

Def. X – vektorový lineárny priestor nad $\mathbb{R}$.
$\|\circ\|$ nazveme normou, ak: $\|\circ\| : X \to \mathbb{R}$

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Def. Lineárny priestor opatrený normou sa nazýva lineárny normovaný priestor.

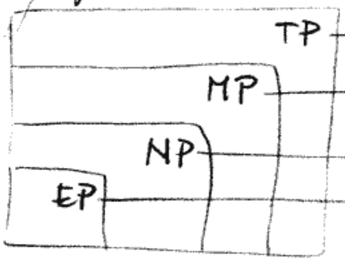
Hölderova nerovnosť: $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($\Rightarrow p, q$ – asociované)

$x \in l_p, y \in l_q \Rightarrow \left| \sum_1^{\infty} x_i y_i \right| \leq \|x_p\| \cdot \|y_q\|$

(ak $p = q = 2 \to$ Cauchyho nerovnosť)

$$\left| \sum x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_1^{\infty} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_1^{\infty} |y_i|^2}$$

Veta: Nech $(X, \|\circ\|)$ je normovaný priestor. Potom funkcia $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ definovaná predpisom $\rho(x,y) = \|x - y\|$ je metrikou na X.



TP → topologické
MP → metrické
NP → normované
EP → euklidovské

} priestory

$f : L \times L \to \mathbb{R}$

Def. L – lineárny priestor: $f : x, y \longmapsto (x,y)$ – skalárny súčin ak platí:
(x, y – vektory z L)

1) $(x,y) = (y,x)$
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$
4) $0 \leq (x,x) < \infty$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Def. Lineárny priestor na ktorom je definovaný skalárny súčin je euklidovský priestor.

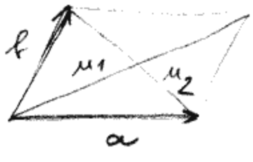
Veta (SCB): V euklidovskom priestore platí: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, kde $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$.

Veta: každý euklidovský priestor je normovaný, a $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Cauchy–Bolzanova podmienka konvergencie:

$$\sum_1^{\infty} a_k \text{ konverguje} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{\substack{m,n > n_0 \\ m > n}} : |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon .$$

Rovnobežníková rovnosť:



$$|u_1|^2 + |u_2|^2 = 2 \cdot |a|^2 + 2 \cdot |b|^2$$

Veta: V unitárnom euklidovskom priestore platí rovnobežníková rovnosť.

! normovaný priestor je euklidovský $\Leftrightarrow$ norma spĺňa rovnobežníkové pravidlo

! $\big|\|a\|-\|b\|\big| \le \|a\pm b\|$

Veta: V euklidovskom priestore sú operácie súčtu, skalárneho násobku a skalárneho súčinu spojité.

Veta: Nech D je vlastný uzavretý podpriestor normovaného priestoru E. Potom D je riedkou množinou v E.

Veta: Nech E je lineárny priestor. Potom v ňom existuje maximálna (vzhľadom na inklúziu) lineárne nezávislá množina.

príklady funkcií a priestorov:

Dirichletova funkcia – v každom bode nespojitá (osciláciou)

Riemannova –"– – nespojitá v Q, spojitá v $R-Q$ (osciláciou)

$f(x) = \begin{cases} x & x\in Q \\ -x & x\in R-Q \end{cases}$ – 1 bod spojitosti (osciláciou)

nespočítateľná množina

spočítateľné množiny, Cantorovo diskontinuum – majú L. mieru 0

normované priestory:

$l_1 = \{x=(x_n): \sum_1^\infty |x_n| < +\infty\}$ $\quad \|x\| = \sum_1^\infty |x_n|$

$l_p = \{x=(x_n): \sum_1^\infty |x_n|^p < +\infty\}$ $\quad \|x\|_p = \left(\sum_1^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$BV\langle a,b\rangle = \{f:\langle a,b\rangle \to R: \operatorname{Var}_a^b f < \infty\}$ $\quad \|f\| = |f(a)| + \operatorname{Var}_a^b(f)$

nie je eukl. $\to C(0,\frac{\pi}{2})$ $\quad \|f\| = \max_{x\in(0,\frac{\pi}{2})} \{|f(x)|\}$

euklidovské priestory:

$l_2 = \{x=(x_n): \sum_1^\infty x_n^2 < +\infty\}$ $\quad (x,y) = \sum_{n=1}^\infty x_n\cdot y_n$

$C\langle a,b\rangle$ $\quad (f,g) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$

$\to P \subset C\langle a,b\rangle$: P – hustá, ale nie uzavretá

$\to D \subset l_1$: D – hustá, –"–

↳ od istého n má nulové členy